

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO REPRESENTACIÓN DE CURVAS EN ECUACIONES PARAMÉTRICAS

JOSÉ CARLOS DOMÍNGUEZ RUÍZ

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO.
REPRESENTACIÓN DE CURVAS
EN ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO.
REPRESENTACIÓN DE CURVAS
EN ECUACIONES PARAMÉTRICAS.

José Carlos Domínguez Ruíz

Coordenadas polares en el plano. Representación de curvas en ecuaciones paramétricas.– Córdoba: UCOPress Editorial Universidad de Córdoba, 2022.

19x26 cm; 224 pp.

THEMA: PBKJ

Autoría: José Carlos Domínguez Ruíz

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO.
REPRESENTACIÓN DE CURVAS EN ECUACIONES PARAMÉTRICAS

© José Carlos Domínguez Ruíz

© Edita: UCOPress Editorial Universidad de Córdoba, 2022
Campus Universitario de Rabanales
Ctra. Nacional IV, Km. 396. 14071 Córdoba (España)
Tel: 957 21 81 26
<https://ucopress.uco.es> • ucopress@uco.es

ISBN: 978-84-9927-666-3

eISBN: 978-84-1072-022-0

DOI: <https://doi.org/10.21071/000156>

DL: CO 55-2022



Esta editorial es miembro de la UNE, lo que garantiza la difusión y comercialización de sus publicaciones a nivel nacional e internacional.

Edición digital en acceso abierto 2026

Este libro fue editado bajo un proceso certificado por la Norma ISO 9001:2015



Esta publicación se encuentra bajo una licencia internacional Creative Commons BY-NC-SA 4.0. Puede copiar, distribuir, adaptar y crear obras derivadas de este contenido, siempre y cuando le atribuya la autoría original y no utilice esta obra con fines comerciales. Las obras derivadas también deben estar bajo una licencia similar.

A mis padres

ÍNDICE

Introducción	11
1. Coordenadas polares en el plano.....	15
2. Curvas planas en ecuaciones paramétricas	31
3. Aplicaciones del cálculo diferencial al estudio de curvas regulares planas.....	43
3.1. Crecimiento o decrecimiento de una curva.....	50
3.2. Extremos relativos de una curva	61
3.3. Concavidad o convexidad de una curva.....	68
4. Estudio y representación de algunas curvas clásicas	89
4.1 Circunferencia.....	89
4.2 Espiral de Arquímedes	94
4.3 Cardiode.....	103
4.4 Cicloide	112
4.5 Cisoide de Diocles	116
4.6 Folium de Descartes.....	120
4.7 Rosa de tres pétalos.....	129
4.8 Curvas asociadas al problema de los dos cuerpos	164
4.8.1 Caso en que $e = 0$	165
4.8.2 Caso en que $0 < e < 1$	166
4.8.3 Caso en que $e = 1$	181
4.8.4 Caso en que $e > 1$	191
Bibliografía	217

INTRODUCCIÓN

No todos los subconjuntos del plano “que pueden ser representados a través de una línea” son grafo de alguna función real de variable real, así como tampoco, la forma usual de describir el plano como el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la única posible.

Vamos a dedicar unas páginas, a estudiar como el potencial de la herramienta del cálculo diferencial no se limita al modelo cartesiano usual del plano ni a la forma de describir estos subconjuntos “formados por líneas” dentro de él.

Empezaremos nuestro estudio presentando de modo somero, una de entre las diferentes alternativas de descripción del plano, la más utilizada después del modelo cartesiano: las coordenadas polares del plano, y una de entre las diferentes alternativas para describir estos subconjuntos de líneas planas: las ecuaciones paramétricas.

Hablaremos también de líneas planas en sus coordenadas polares, aunque veremos que realmente las podemos interpretar como curvas en ecuaciones paramétricas.

Descubriremos a lo largo del texto, como la descripción de estas líneas como curvas regulares planas engloba a todas las demás descripciones. A partir de aquí, estudiaremos si los conceptos y el estudio clásico para representar los grafos de funciones reales de variable real pueden ser generalizados para todas las curvas regulares planas. Clásicamente el estudio de la representación de estas curvas regulares planas no se hace desde esta perspectiva, sino que lleva su propia metodología.

Terminaremos aplicando todo lo aprendido para representar algunas curvas clásicas. Algunas de ellas tratadas desde la antigüedad y algunas otras más recientes, asociadas a algún problema físico también conocido.

Capítulo 1

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

1. Coordenadas polares en el plano

Aunque más adelante intentaremos dar una interpretación geométrica, vamos a iniciar nuestro estudio enunciando el siguiente resultado:

Teorema 1.1 La correspondencia definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \psi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ (\rho, \theta) &\rightarrow \psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva.

Demostración:

Observemos en principio que si: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta \in \mathbb{R} \\ \rho \sin \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Pero además, si ocurriera que: $\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta = 0 \\ \rho \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \\ \theta \in \{0, \pi\} \end{cases} \Rightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \cap \{0, \pi\} = \emptyset$$

Algo que evidentemente es imposible.

Por tanto $\psi(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(\rho, \theta) \neq (0, 0)$, i.e., $\psi(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

También:

$$\begin{aligned} \text{Si } (\rho, \theta), (\rho', \theta') &\in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad (\rho, \theta) = (\rho', \theta') \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta = \rho' \cos \theta' \\ \rho \sin \theta = \rho' \sin \theta' \end{cases} &\Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\rho' \cos \theta', \rho' \sin \theta') \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') \end{aligned}$$

Luego ψ es una aplicación que queda bien definida.

Tomemos ahora: $(\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y supongamos que:

$\psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta')$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= (\rho' \cos \theta', \rho' \sin \theta') = \psi(\rho', \theta') \Rightarrow \\ \rho \cos \theta &= \rho' \cos \theta' \\ \rho \sin \theta &= \rho' \sin \theta' \end{aligned} \Rightarrow$$

De un lado:

$$\begin{aligned} \rho^2 \cos^2 \theta &= (\rho')^2 \cos^2 \theta' \\ \rho^2 \sin^2 \theta &= (\rho')^2 \sin^2 \theta' \\ \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta &= (\rho')^2 \cos^2 \theta' + (\rho')^2 \sin^2 \theta' \Rightarrow \\ \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= (\rho')^2 (\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta') \Rightarrow \rho^2 = (\rho')^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\rho| &= |\rho'| \Rightarrow \rho = \rho' \text{ por ser ambos positivos} \end{aligned}$$

Y conocido este hecho, de otro lado:

$$\begin{aligned} \rho \cos \theta &= \rho' \cos \theta' \\ \rho \sin \theta &= \rho' \sin \theta' \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases} \Rightarrow \cos \theta' \sin \theta = \cos \theta \sin \theta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta - \theta') = 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \theta' < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta - \theta') = 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ -2\pi < -\theta' \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(\theta - \theta') = 0 \\ -2\pi < \theta - \theta' < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ó } \theta - \theta' = -\pi \\ \text{ó } \theta - \theta' = 0 \\ \text{ó } \theta - \theta' = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ó } \theta' = \theta + \pi \\ \text{ó } \theta' = \theta \\ \text{ó } \theta' = \theta - \pi \end{array} \right\}$$

Tenemos así:

$$\begin{aligned} & \text{si } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \text{ y } \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho' \text{ y además ocurre:} \\ \text{(i) } \theta' = \theta + \pi, \quad \text{(ii) } \theta' = \theta, \quad \text{o (iii) } \theta' = \theta - \pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(i) si ocurriera: } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta'), \\ & \rho = \rho' \text{ y } \theta' = \theta + \pi \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') & \Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\rho \cos(\theta + \pi), \rho \sin(\theta + \pi)) \Rightarrow \\ \rho \cos \theta &= \rho \cos(\theta + \pi) \Rightarrow \cos \theta = \cos \theta \cos \pi - \sin \theta \sin \pi \Rightarrow \cos \theta = -\cos \theta \Rightarrow \\ \rho \sin \theta &= \rho \sin(\theta + \pi) \Rightarrow \sin \theta = \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi \Rightarrow \sin \theta = -\sin \theta \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \\ 2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \end{array} \Rightarrow \psi(\rho, \theta) = (0, 0) \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(ii) si ocurriera: } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta'), \\ & \rho = \rho' \text{ y } \theta' = \theta - \pi \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') & \Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\rho \cos(\theta - \pi), \rho \sin(\theta - \pi)) \Rightarrow \\ \rho \cos \theta &= \rho \cos(\theta - \pi) \Rightarrow \cos \theta = \cos \theta \cos \pi + \sin \theta \sin \pi \Rightarrow \cos \theta = -\cos \theta \Rightarrow \\ \rho \sin \theta &= \rho \sin(\theta - \pi) \Rightarrow \sin \theta = \sin \theta \cos \pi - \cos \theta \sin \pi \Rightarrow \sin \theta = -\sin \theta \Rightarrow \\ & \Rightarrow \begin{array}{l} 2 \cos \theta = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \\ 2 \sin \theta = 0 \Rightarrow \sin \theta = 0 \end{array} \Rightarrow \psi(\rho, \theta) = (0, 0) \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

De todo lo anterior deducimos que solo puede darse la opción (iii), i.e., ocurre:

$$\text{si } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \text{ y } \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho' \\ \text{y} \\ \theta = \theta' \end{array} \right. \Rightarrow (\rho, \theta) = (\rho', \theta')$$

Y en consecuencia la aplicación ψ es una aplicación inyectiva.

Tomemos ahora $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ arbitrario. Tenemos para tal (x, y) las siguientes opciones:

1. (x, y) está en el semieje de abscisas positivo, i.e., $x > 0, y = 0$
2. (x, y) está en el primer cuadrante, i.e., $x > 0, y > 0$
3. (x, y) está en el semieje de ordenadas positivo, i.e., $x = 0, y > 0$
4. (x, y) está en el segundo cuadrante, i.e., $x < 0, y > 0$
5. (x, y) está en el semieje de abscisas negativo, i.e., $x < 0, y = 0$
6. (x, y) está en el tercer cuadrante, i.e., $x < 0, y < 0$
7. (x, y) está en el semieje de ordenadas negativo, i.e., $x = 0, y < 0$
8. (x, y) está en el cuarto cuadrante, i.e., $x > 0, y < 0$

Bien, pues veamos que ocurre en cada una de las situaciones:

1. Si (x, y) está en el semieje de abscisas positivo, i.e., si $x > 0, y = 0$, y consideramos el par: (ρ, θ) con: $\begin{cases} \rho = x \\ \theta = 0 \end{cases}$, tenemos lo siguiente:

$(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi(x, 0) = (x \cos 0, x \sin 0) = (x, 0)$$

Luego si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x > 0, y = 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$,

que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x > 0$, $y > 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Bien, pues consideramos entonces el par:

$$(\rho, \theta), \text{ con: } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que: } \text{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Tendremos para él: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta, \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta)$$

Pero como:

$$\text{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Tendremos de un lado:

$$\begin{aligned} x \text{tg} \theta = y &\Rightarrow x^2 \text{tg}^2 \theta = y^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \text{tg}^2 \theta} = \\ &= \sqrt{x^2(1 + \text{tg}^2 \theta)} = |x| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = |x| \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned} x = \frac{y}{\text{tg} \theta} &\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{\text{tg}^2 \theta} \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\text{tg}^2 \theta} + y^2} = \\ &= \sqrt{\frac{y^2}{\text{tg}^2 \theta} (1 + \text{tg}^2 \theta)} = \left| \frac{y}{\text{tg} \theta} \right| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{y}{\text{tg} \theta} \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{y}{\text{tg} \theta} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{y}{\sin \theta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho = \frac{y}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Por lo que ocurre:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \left(\frac{x}{\cos \theta} \cos \theta, \frac{y}{\sin \theta} \sin \theta \right) = (x, y)$$

i.e.,

si $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

3. Si ahora: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x = 0$, $y > 0$ y consideramos el par:

$$(\rho, \theta) = \left(y, \frac{\pi}{2}\right)$$

Tendremos: $(\rho, \theta) = \left(y, \frac{\pi}{2}\right) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi\left(y, \frac{\pi}{2}\right) = \left(y \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), y \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, y) = (x, y)$$

Luego:

si $x = 0$, $y > 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

4. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x < 0$, $y > 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \text{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Si consideramos entonces el par (ρ, θ) con:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta = \alpha + \pi \end{cases}$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 &\Rightarrow \pi - \frac{\pi}{2} < \alpha + \pi < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

i.e., tenemos que: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

siendo: $x < 0$, $y > 0$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tenemos:

De un lado.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg} \theta \Rightarrow y^2 = x^2 \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = |x| \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \\ &= (-x) \left(\frac{1}{-\cos \theta} \right) = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Y de otro:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} + y^2} = \\ &= \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \right| \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{|y|}{|\operatorname{tg} \theta|} \frac{1}{|\cos \theta|} = \frac{y}{\frac{|\operatorname{sen} \theta|}{|\cos \theta|}} \frac{1}{|\cos \theta|} = \\ &= \frac{y}{|\operatorname{sen} \theta|} = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \rho = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \end{aligned}$$

Luego:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{x}{\cos \theta} \cos \theta, \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y)$$

i.e.,

si $x < 0$, $y > 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

5. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y = 0$, basta considerar ahora el par:

$$(\rho, \theta) = (-x, \pi)$$

para que ocurra: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi(-x, \pi) = (-x \cos(\pi), -x \operatorname{sen}(\pi)) = (-x \cdot (-1), -x \cdot 0) = (x, 0) = (x, y)$$

Luego también:

si $x < 0$, $y = 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

6. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y < 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Consideramos en este caso el par:

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + \pi)$$

Y tendremos entonces:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

i.e., $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$

Además, siendo $x < 0$, $y < 0$, $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ocurre lo siguiente:

De un lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg} \theta \Rightarrow y^2 = x^2 \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = |x| \frac{1}{|\cos \theta|} = \\ &= (-x) \frac{1}{(-\cos \theta)} = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos \theta}\end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \right| \frac{1}{|\cos \theta|} = \\ &= \frac{|y|}{|\operatorname{tg} \theta|} \frac{1}{|\cos \theta|} = \frac{(-y)}{\left| \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right|} \frac{1}{|\cos \theta|} = \frac{(-y)}{(-\sin \theta)} = \frac{y}{\sin \theta} \Rightarrow \rho = \frac{y}{\sin \theta}\end{aligned}$$

Por tanto: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \left(\frac{x}{\cos \theta} \cos \theta, \frac{y}{\sin \theta} \sin \theta \right) = (x, y)$$

i.e.,

si $x < 0$, $y < 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

7. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x = 0$, $y < 0$ y consideramos el par:

$$(\rho, \theta) = \left(-y, \frac{3\pi}{2} \right)$$

Tendremos:

$$(\rho, \theta) = \left(-y, \frac{3\pi}{2} \right) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

Y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi\left(-y, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-y \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), -y \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0, y) = (x, y)$$

Luego:

si $x = 0$, $y < 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

8. Por último, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x > 0$, $y < 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Bien, pues vamos a considerar entonces el par:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + 2\pi \right)$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 &\Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha + 2\pi = \theta < 2\pi \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

i.e.,

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + 2\pi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

Y además, de un lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = x \operatorname{tg} \theta \Rightarrow y = x \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \Rightarrow y^2 = x^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + x^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{x^2 \operatorname{cos}^2 \theta + x^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{x^2}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = \\ &= \left| \frac{x}{\operatorname{cos} \theta} \right| = \frac{|x|}{|\operatorname{cos} \theta|} = \frac{x}{\operatorname{cos} \theta}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\rho = \frac{x}{\operatorname{cos} \theta}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow x = \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow x = \frac{y \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow x^2 = y^2 \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \Rightarrow \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{y^2 \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} + y^2} = \sqrt{\frac{y^2 \operatorname{cos}^2 \theta + y^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 \theta}} = \\ &= \left| \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \right| = \frac{|y|}{|\operatorname{sen} \theta|} = \frac{-y}{-\operatorname{sen} \theta} = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\rho = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}$$

Por lo que tenemos que:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \operatorname{cos} \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{x}{\operatorname{cos} \theta} \operatorname{cos} \theta, \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y)$$

Luego:

$$\text{si } x > 0, \quad y < 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad \text{que cumple: } \psi(\rho, \theta) = (x, y)$$

Vemos, con todo lo anterior que esté donde esté $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, siempre logramos encontrar: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple que:

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y)$$

Y por tanto la función ψ también es sobreyectiva.

Este hecho unido a todos los anteriores, permiten concluir que la aplicación ψ es una aplicación biyectiva. Así queda probado el resultado.

c.s.q.d.

Este resultado garantiza que tenga sentido la siguiente definición:

Definición 1.2 Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, llamamos coordenadas polares del punto (x, y) al único par $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ tal que:

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y)$$

En otras palabras, llamamos coordenadas polares de (x, y) , al par:

$$(\rho, \theta) = \psi^{-1}(x, y)$$

En esta situación, i.e., si (ρ, θ) son las coordenadas polares del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, entonces:

$\rho > 0$ recibe el nombre de “radio polar” del punto (x, y) ó “distancia radial”

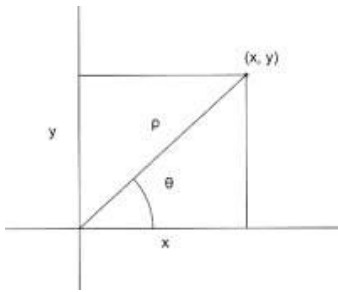
$\theta \in [0, 2\pi)$ recibe el nombre de “argumento” del punto (x, y) ó “ángulo polar”

La forma de determinar las coordenadas polares de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ha quedado descrita al estudiar la sobreyectividad de la aplicación ψ

Geométricamente, si por ejemplo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x > 0$, $y > 0$, i.e., si está situado en el primer cuadrante, hemos determinado en el teorema, cómo su antecedente (ρ, θ) venía dado por:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ es el único ángulo que cumple: } \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$



i.e., ρ es la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas $(0,0)$

Y θ es el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo, pues este es el único ángulo del primer cuadrante cuya tangente es:

$$\frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y}{x}$$

Las coordenadas polares (ρ, θ) de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ que esté en el primer cuadrante, vienen dadas pues, por:

Distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas (radio polar ρ)

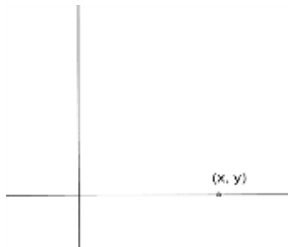
Ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo (argumento θ)

No es difícil comprobar, como para los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ situados en los demás cuadrantes del plano ó sobre los semiejes, seguimos teniendo la misma interpretación.

Hemos visto la de un punto que corresponde al caso 2 de los estudiados en el teorema.

Intentemos hacerlo para todos los demás casos:

1. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x > 0$, $y = 0$. Veíamos en el resultado como su antecedente venía dado por el par: $(\rho, \theta) = (x, 0)$



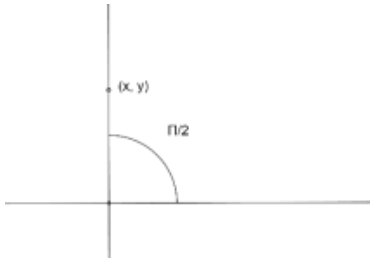
Y desde luego:

$\rho = x$ marca la distancia de (x, y) a $(0,0)$

$\theta = 0$ es el ángulo que forma (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

3. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x = 0$, $y > 0$, su antecedente viene dado por:

$$(\rho, \theta) = \left(y, \frac{\pi}{2}\right)$$



Y sin duda:

$\rho = y$ es la distancia de $(0, y)$ a $(0, 0)$

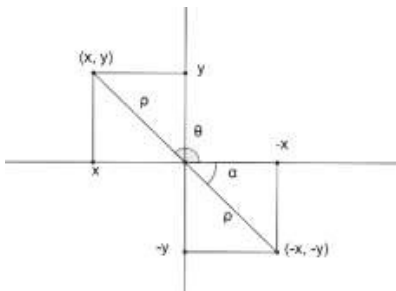
$\theta = \pi/2$ es el ángulo que forma $(0, y)$ con el semieje de abscisas positivo

4. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y > 0$, su antecedente viene dado por el par:

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + \pi)$$

Siendo α el único ángulo entre $-\pi/2$ y 0 que cumple:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$$



Tal ángulo α es, como se muestra en la figura, el ángulo que forma el vector de coordenadas $(-x, -y)$ con el semieje de abscisas positivo (medido en sentido negativo, i.e., en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si tomamos el simétrico del punto $(-x, -y)$ respecto del origen de coordenadas, obtenemos el punto (x, y) , y si notamos por θ al ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo,

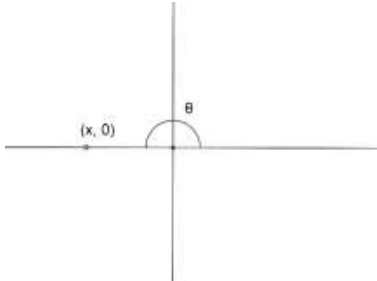
la relación que se establece entre α y θ es, como se aprecia en la figura: $\theta - \alpha = \pi$. Por tanto, θ , el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo tendrá amplitud: $\theta = \alpha + \pi$. Nuevamente ocurre, como vemos, que:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto (x, y) al origen.

$\theta = \alpha + \pi$ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

5. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y = 0$, el antecedente de (x, y) viene dado por el par:

$$(\rho, \theta) = (-x, \pi).$$



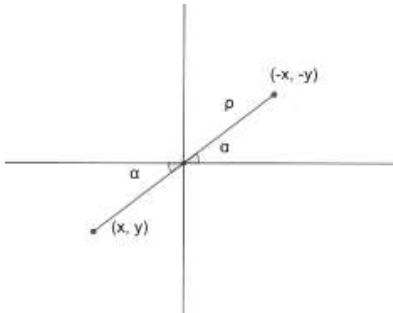
Y sin duda:

$\rho = -x$ es la distancia de (x, y) a $(0, 0)$

$\theta = \pi$ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

6. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y < 0$, su antecedente viene dado por:

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + \pi)$$



Siendo $\alpha \in (0, \pi/2)$ el único ángulo que cumple:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$$

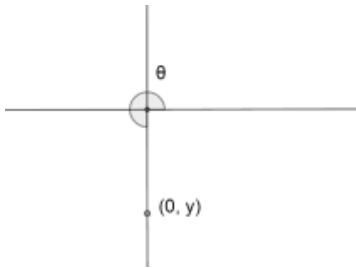
Tal ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ no es otro que el ángulo que forma el vector de coordenadas $(-x, -y)$ con el semieje de abscisas positivo. Siendo además el punto (x, y) el punto simétrico de $(-x, -y)$ respecto del origen, ocurre que α es el ángulo que forma el semieje de abscisas negativo con el vector de coordenadas (x, y) .

Por tanto $\theta = \alpha + \pi$ vuelve a ser el ángulo que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

Y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ sigue siendo, sin duda, la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas $(0, 0)$

7. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x = 0$, $y < 0$, su antecedente era:

$$(\rho, \theta) = \left(-y, \frac{3\pi}{2}\right)$$



Y no cabe duda de que:

$\rho = -y > 0$ es la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas.

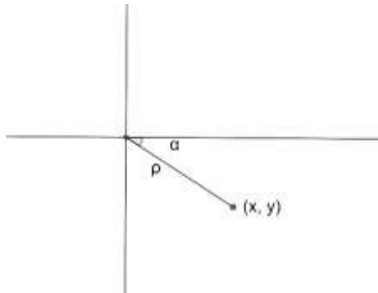
$\theta = 3\pi/2$ es el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

8. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x > 0$, $y < 0$, su antecedente venía dado por:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + 2\pi\right)$$

Siendo α el único ángulo entre $-\pi/2$ y 0 que cumple que:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$$



Este ángulo según la gráfica no es otro que el ángulo que forma el semieje de abscisas positivo con el vector de coordenadas (x, y) medido en sentido negativo, i.e., en el sentido de las agujas del reloj.

$\theta = \alpha + 2\pi$ no será otro ángulo entonces, que el que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo tomado en sentido positivo (i.e. en sentido contrario a las agujas del reloj)

Y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ sigue siendo la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas.

Sea cual sea pues, la posición de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ en el plano, sus coordenadas polares $(\rho, \theta) = \psi^{-1}(x, y)$ pueden ser interpretadas como:

$\rho = \text{distancia de } (x, y) \text{ al origen } (0, 0)$

$\theta = \text{ángulo que forma el vector } (x, y) \text{ con el semieje de abscisas positivo}$

Podemos concluir de todo lo anterior:

- Para cada punto (x, y) del plano distinto del origen, podemos encontrar unas únicas coordenadas polares $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que lo describen.
- Y recíprocamente, dado $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, existe un único punto (x, y) del plano, distinto del origen, cuyas coordenadas polares son exactamente (ρ, θ)

Definición 1.3: Sea:

$$\begin{aligned} f: A \subseteq [0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) \end{aligned}$$

una función definida en $A \subseteq [0, 2\pi)$. Llamamos **grafo ó gráfica de f en coordenadas polares**, y lo notamos: $\text{graf}_{\text{pol}}(f)$ al conjunto:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\}$$

Observaciones:

1. No cabe duda, a la vista de la definición, de que la gráfica de cualquier función f en coordenadas polares, es un subconjunto de

$$(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

i.e.,

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) \subseteq (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

2. Siendo para cada función f en estas condiciones, su gráfica en coordenadas polares un subconjunto de $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, i.e., ocurriendo:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) \subseteq (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

será: $\psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f))$ un subconjunto de $\psi((0, +\infty) \times [0, 2\pi))$

Luego la gráfica de una función f en coordenadas polares tiene una representación en coordenadas rectangulares en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Tal representación no será otra que:

$$\begin{aligned} \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f)) &= \psi(\{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\}) = \\ &= \{\psi(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\} = \\ &= \{(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Vamos a ver ahora, a modo de ejemplo algunas gráficas clásicas de funciones en coordenadas polares.

Ejemplos:

1. Si $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. La función:

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = r \end{aligned}$$

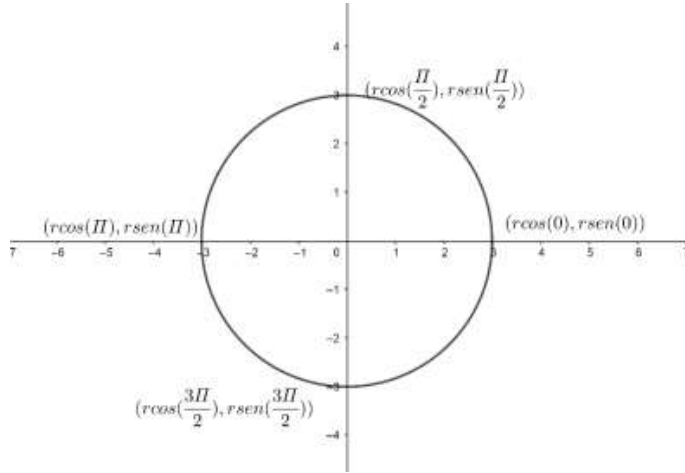
Tiene por gráfica en coordenadas polares, al conjunto:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\} = \{(r, \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\}$$

Cuya representación en coordenadas cartesianas, en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ será:

$$\begin{aligned} \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f)) &= \psi(\{(r, \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\}) = \\ &= \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Este conjunto representa en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ a la **circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio $r > 0$** .



El poder tomar esta circunferencia como grafo de una función, aunque sea un grafo en coordenadas polares, ya supone (al menos para este caso concreto) una ventaja frente a los grafos en coordenadas cartesianas. No podemos encontrar en coordenadas cartesianas una función cuyo grafo sea esta circunferencia. Y no podemos hacerlo por razones evidentes mirando la propia gráfica.

Si encontráramos una función real de variable real g cuya gráfica fuera nuestra circunferencia $C((0,0), r)$ tendríamos lo siguiente:

$$\begin{cases} (0, r) \in C((0,0), r) \\ (0, -r) \in C((0,0), r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0, r) \in \text{graf}(g) \\ (0, -r) \in \text{graf}(g) \end{cases} \Rightarrow$$

De un lado: $0 \in \text{Dom}(g)$, y de otro: $g(0) = r$ y $g(0) = -r$. Hecho que contradice el que g sea una función.

Por tanto no podemos encontrar una función real de variable real en coordenadas cartesianas cuyo grafo sea la circunferencia $C((0,0), r)$.

2. La función definida en la forma:

$$\begin{aligned} f: (0, 2\pi) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = \theta \end{aligned}$$

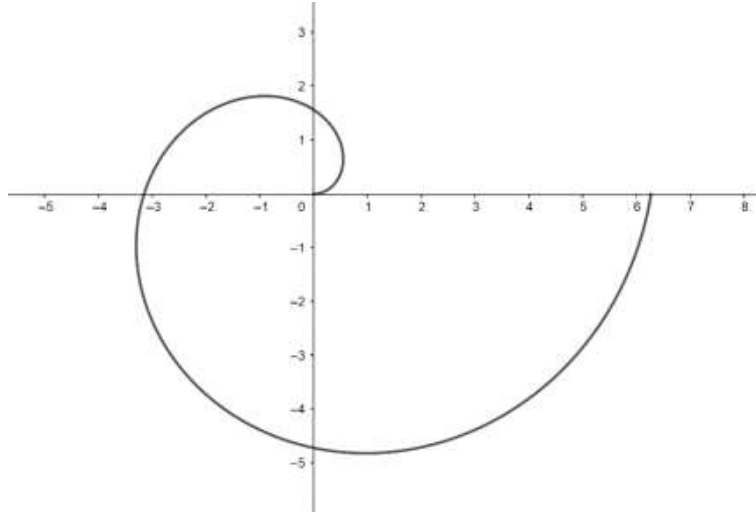
Tiene como grafo en coordenadas polares:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\} = \{(\theta, \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\}$$

Cuya representación en coordenadas cartesianas será:

$$\{(\theta \cos \theta, \theta \sin \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Este grafo en coordenadas polares, recibe el nombre de “**espiral de Arquímedes**” y describe a todos los puntos de $(-2\pi, 2\pi) \times (-2\pi, 2\pi)$ cuya distancia al origen coincide con el ángulo que forma su radio vector con el semieje de abscisas positivo.



3. La función definida en la forma:

$$f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f(\theta) = \sqrt{2} a \sqrt{\cos(2\theta)}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Es una función que queda bien definida, pues:

$$\text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(2\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

$$\text{si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 2\theta < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\cos(2\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

$$\text{si } \theta \in \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \Rightarrow \frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi \Rightarrow \frac{7\pi}{2} < 2\theta < 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

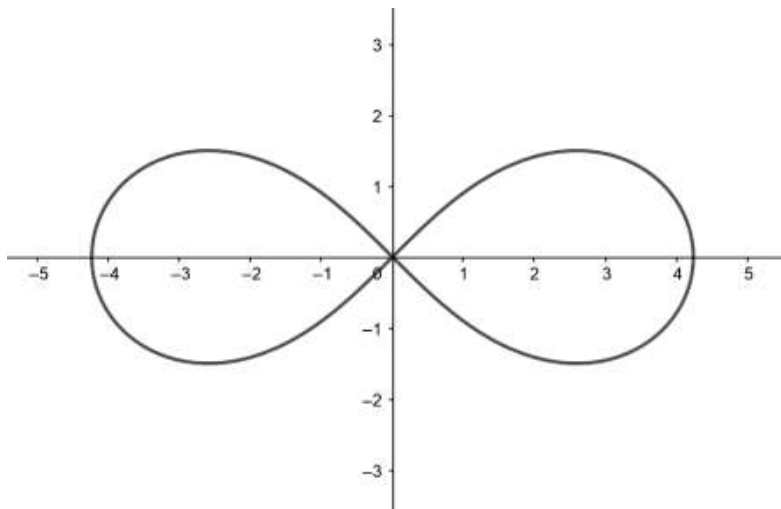
Y que tiene además por grafo en coordenadas polares al conjunto:

$$\text{graf}_{pol}(f) = \left\{ (f(\theta), \theta), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \right\}$$

Las coordenadas cartesianas de este conjunto de puntos en coordenadas polares forman el subconjunto de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ siguiente:

$$\left\{ \left(\sqrt{2} a \sqrt{\cos(2\theta)} \cos\theta, \sqrt{2} a \sqrt{\cos(2\theta)} \sen\theta \right), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \right\}$$

La curva que describe, recibe el nombre de “**Lemniscata de Bernoulli**”, y presenta la siguiente apariencia:



4. La función definida en la forma:

$$f: [0, 2\pi] - \{\pi\} \subseteq [0, 2\pi] \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$$

siendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Queda bien definida, tiene por grafo en coordenadas polares:

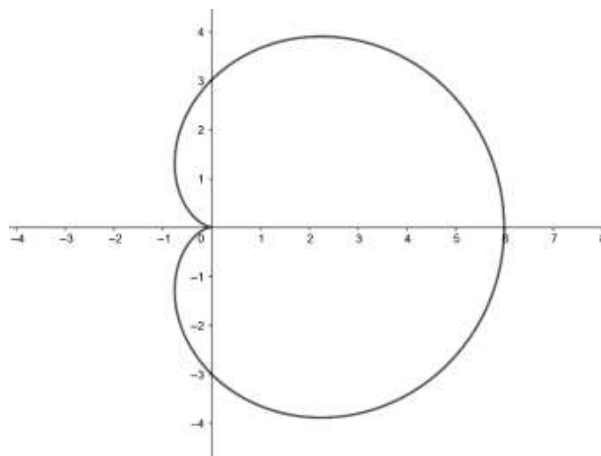
$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] - \{\pi\}\} =$$

$$= \{(a(1 + \cos\theta), \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] - \{\pi\}\}$$

Conjunto de coordenadas polares, que tiene como representación en coordenadas cartesianas:

$$\{(a(1 + \cos\theta)\cos\theta, a(1 + \cos\theta)\sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] - \{\pi\}\}$$

El subconjunto que origina en $\mathbb{R}^2$ recibe el nombre de “**cardioide**”.



Capítulo2

CURVAS PLANAS EN ECUACIONES PARAMÉTRICAS

2. Curvas planas en ecuaciones paramétricas

Vemos, a través de los ejemplos precedentes, como no todos los subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ formados por “líneas” vienen determinados por grafos de funciones reales de variable real.

El caso de la circunferencia, que nos hemos detenido a examinar, es un buen ejemplo, aunque realmente ninguna de las 4 gráficas citadas y construidas anteriormente pueden expresarse como grafos de funciones reales de variable real, por idénticas razones a las expuestas para la circunferencia.

Si nos fijamos, el proceso seguido en estos ejemplos, desemboca en subconjuntos del plano de la forma:

$$\{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

i.e., en subconjuntos del plano descritos por un parámetro θ que asociamos a un ángulo.

Nos puede hacer pensar esto, que podemos describir “líneas” en el plano siguiendo este modelo, i.e., subconjuntos de puntos de $\mathbb{R}^2$ descritos por un parámetro, pero sin la rigidez de que este parámetro sea necesariamente un ángulo, ó de que las componentes de cada punto tengan entre ellas ningún tipo de relación, salvo que sean ambas funciones en la misma variable (el parámetro escogido), y a las que podríamos pedir un mínimo de regularidad.

Bien, pues de esta forma es como vamos a describir algunos tipos de subconjuntos del plano formados por líneas. Vamos a empezar, no obstante, viendo una definición previa.

Definición 2.1 Sea $k \in \mathbb{N}$, y f una función:

$$f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Decimos **que la función f es de clase k en el conjunto A** , ó que f es k – veces continuamente diferenciable en el conjunto A , si f es k – veces diferenciable en A y la derivada de orden k de f , $f^{(k)}$ es continua en A .

Al conjunto de todas las funciones de clase k en el conjunto A , lo notamos por: $C^k(A)$, i.e:

$$C^k(A) = \{f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \text{ es } k - \text{ veces diferenciable en } A \text{ y } f^{(k)} \text{ es continua en } A\}$$

Estamos ahora ya en condiciones de dar la siguiente definición:

Definición 2.2 Una **curva regular plana** es una aplicación:

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, que verifica:

1. $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(a, b)$
2. $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0, 0), \quad \forall t \in (a, b)$

La variable t se denomina parámetro de la curva α . Al conjunto:

$$\alpha(a, b) = \{\alpha(t), \quad t \in (a, b)\} = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad t \in (a, b)\}$$

lo llamaremos **traza de la curva α** , y lo notaremos: $\text{traz}(\alpha)$, i.e.,

$$\text{traz}(\alpha) = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad t \in (a, b)\}$$

Observaciones:

1. Hay que observar en primer lugar que lo que recibe el nombre de curva es realmente la aplicación α , y no el subconjunto que su imagen determina en el plano $\mathbb{R}^2$. Es importante remarcar este hecho, por la siguiente observación que vamos a hacer:
2. Consideremos por ejemplo las funciones:

$$\begin{aligned}\alpha: (0,3) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (t, t)\end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned}\beta: (-3,0) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \beta(t) = (-t, -t)\end{aligned}$$

Ocurre, que tanto α como β son curvas regulares planas, pues:

$$\begin{aligned}\alpha_1, \alpha_2 &\in C^1(0,3), & \beta_1, \beta_2 &\in C^1(-3,0) \\ \alpha'(t) &= (1,1) \neq (0,0), \forall t \in (0,3), & \beta'(t) &= (-1,-1) \neq (0,0), \forall t \in (-3,0)\end{aligned}$$

También es evidente que α y β son funciones distintas, pues por ejemplo, tienen distinto dominio, y por tanto **son curvas distintas**.

Sin embargo:

$$\begin{aligned}\text{Si } (x, y) \in \text{traz}(\alpha) &\Rightarrow (x, y) = (t, t) \text{ con } t \in (0,3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) = (-(-t), -(-t)), \text{ con } (-t) \in (-3,0) \Rightarrow (x, y) \in \text{traz}(\beta)\end{aligned}$$

i.e., $\text{traz}(\alpha) \subseteq \text{traz}(\beta)$

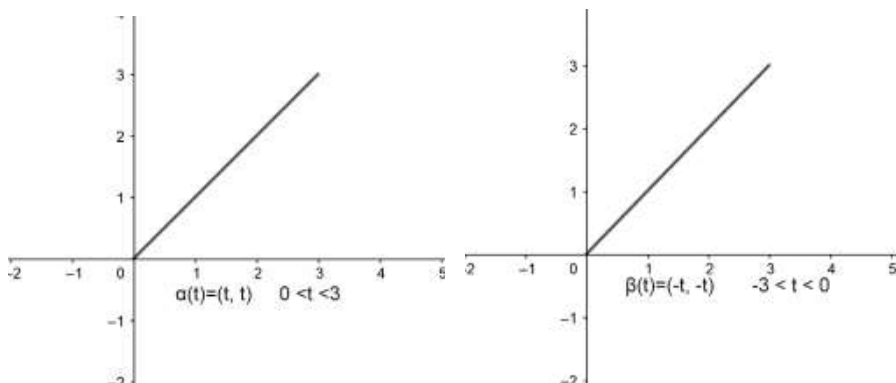
Y recíprocamente:

$$\begin{aligned}\text{Si } (x, y) \in \text{traz}(\beta) &\Rightarrow (x, y) = (-t, -t), \text{ con } t \in (-3,0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x, y) = (-t, -t), \text{ con } (-t) \in (0,3) \Rightarrow (x, y) \in \text{traz}(\alpha)\end{aligned}$$

i.e., $\text{traz}(\beta) \subseteq \text{traz}(\alpha)$

Y de las dos inclusiones: $\text{traz}(\alpha) = \text{traz}(\beta)$

Vemos de esta manera como puede ocurrir que curvas distintas tengan la misma traza, i.e: que curvas distintas tengan como imagen el mismo subconjunto del plano $\mathbb{R}^2$.



3. Esto no ocurría con las funciones reales de variable real y sus grafos, en el sentido de que si dos funciones reales de variable real son distintas, obligatoriamente han de tener distintos grafos.

Si f, g son funciones reales de variable real distintas, entonces puede ocurrir:

Que tengan distintos dominios, ó que tengan el mismo dominio.

Si tienen distintos dominios, i.e: si $Dom(f) \neq Dom(g)$, entonces ha de haber un punto en uno de los dominios que no esté en el otro, supongamos por ejemplo: $\exists x \in Dom(f)$, $x \notin Dom(g)$.

Entonces: $(x, f(x)) \in graf(f)$, pero evidentemente:

$$(x, f(x)) \notin graf(g)$$

Y si ocurre que son funciones distintas, pero que tienen el mismo dominio, ha de ocurrir entonces que: $\exists x \in Dom(f) = Dom(g)$

tal que $f(x) \neq g(x)$. Y en este caso, por ser f y g funciones, se tiene: $(x, f(x)) \in graf(f)$ pero $(x, f(x)) \notin graf(g)$

En cualquier caso como vemos:

$$Si f \neq g \Rightarrow graf(f) \neq graf(g)$$

ó lo que es equivalente, si f, g son dos funciones reales de variable real, entonces:

$$Si graf(f) = graf(g) \Rightarrow f = g$$

Y desde luego también es cierto que:

$$Si f = g \Rightarrow graf(f) = graf(g)$$

Por tanto, se cumple:

$$f = g \leftrightarrow graf(f) = graf(g)$$

Esta es la razón de que tratando con funciones reales de variable real nos hayamos permitido la licencia de utilizar la palabra “curva” para referirnos indistintamente a una función real de variable real ó a su grafo. A partir de ahora, y en este contexto nuevo, como hemos visto no podemos hacer tal identificación.

Hechas estas observaciones, veamos algunos ejemplos clásicos de curvas regulares planas.

Ejemplos:

1. La aplicación:

$$\alpha: (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (t - \text{sent}, 1 - \text{cost})$$

verifica lo siguiente:

$\alpha_1 \in C^1(0, 2\pi)$ por álgebra de derivadas y por álgebra de funciones continuas.

$\alpha_2 \in C^1(0, 2\pi)$ por las mismas razones.

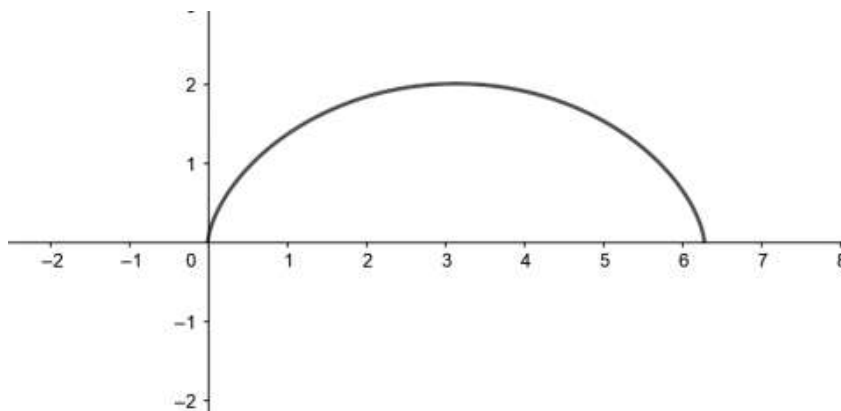
Además $\forall t \in (0, 2\pi)$, $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) = (1 - \text{cost}, \text{sent})$

Y ocurre: $\forall t \in (0, 2\pi)$, $\text{cost}(t) < 1 \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi)$, $1 - \text{cost}(t) > 0$

Por tanto: $\forall t \in (0, 2\pi)$, $1 - \text{cost}(t) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi)$, $\alpha'(t) \neq (0, 0)$

Es, en consecuencia la aplicación α una curva regular plana.

Se conoce clásicamente a esta curva con el nombre de “**cicloide**”



2. Dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, la aplicación:

$$\alpha: (-2\pi, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \left(t, a \cosh\left(\frac{t}{a}\right) \right)$$

verifica lo siguiente:

$\alpha_1 \in C^1(-2\pi, 2\pi)$ por ser una función polinómica.

La función $\alpha_2(t) = a \cosh\left(\frac{t}{a}\right)$ es una función diferenciable en $(-2\pi, 2\pi)$ y

$$\forall t \in (-2\pi, 2\pi), \quad \alpha'_2(t) = a \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \frac{1}{a} = \sinh\left(\frac{t}{a}\right)$$

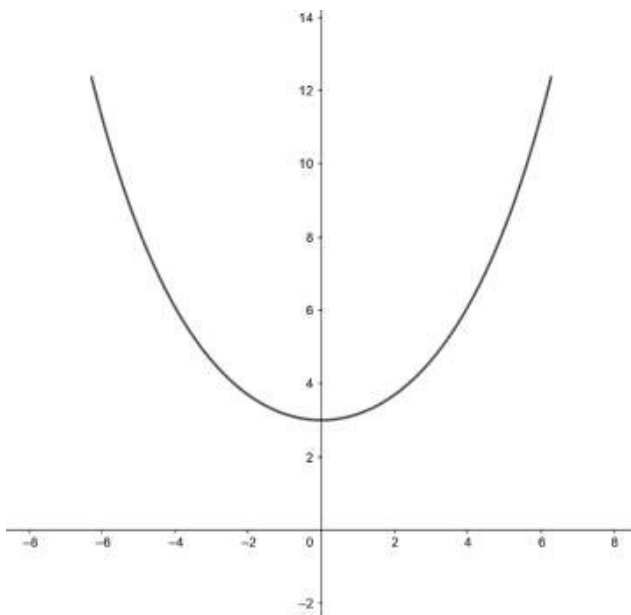
Función que es continua en $(-2\pi, 2\pi)$. Luego también: $\alpha_2 \in C^1(-2\pi, 2\pi)$

Además: $\forall t \in (-2\pi, 2\pi), \quad \alpha'_1(t) = 1 \neq 0$

Por tanto:

$$\forall t \in (-2\pi, 2\pi), \quad \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) = \left(1, \sinh\left(\frac{t}{a}\right) \right) \neq (0,0)$$

Es, en consecuencia α una curva regular plana, que recibe el nombre de “**catenaria**”, y que para el caso concreto en que $a = 3$, tiene por traza:



Conocemos, con esta última, tres formas de “generar gráficas” en el plano cartesiano $\mathbb{R}^2$: (i) como grafos de funciones reales de variable real, (ii) como la representación cartesiana de gráficas de funciones en coordenadas polares y (iii) como trazas de curvas regulares planas en ecuaciones paramétricas. Quizás deberíamos detenernos y plantearnos si existe algún tipo de relación entre estas descripciones. Esto es precisamente lo que vamos a hacer a continuación.

Proposición 2.3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, f una función definida en (a, b)

$$\begin{aligned} f: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

Y supongamos que $f \in C^1(a, b)$. Entonces existe:

$$\begin{aligned} \alpha: (c, d) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

una curva regular plana, que cumple:

$$\text{traz}(\alpha) = \text{graf}(f)$$

Demostración:

Tomemos $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y

$$\begin{aligned} f: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) \end{aligned}$$

una función definida en (a, b) , de clase 1, $f \in C^1(a, b)$

Y vamos a considerar en estas condiciones la correspondencia:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (t, f(t)) \end{aligned}$$

Sin duda:

$$\text{si } t \in (a, b) \Rightarrow \begin{cases} t \in (a, b) \subseteq \mathbb{R} \\ \exists f(t) \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (t, f(t)) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \alpha(t) \in \mathbb{R}^2$$

Además:

$$\text{si } t, s \in (a, b), \quad t = s \Rightarrow f(t) = f(s) \Rightarrow (t, f(t)) = (s, f(s)) \Rightarrow \alpha(t) = \alpha(s)$$

Luego α es realmente una función que queda bien definida en (a, b)

También ocurre lo siguiente:

La función:

$$\begin{aligned} \alpha_1: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha_1(t) = t \end{aligned}$$

es sin duda una función de clase 1 en (a, b) , i.e., $\alpha_1 \in C^1(a, b)$

Por hipótesis, es: $f \in C^1(a, b)$, y por tanto: $\alpha_2 = f \in C^1(a, b)$

Luego: $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(a, b)$

$$\begin{aligned} \text{Y como: } \alpha'_1(t) &= 1, \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) = (1, f'(t)) \neq (0, 0) \\ &\forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

En consecuencia la función α es una curva regular plana.

Pero además:

$$\begin{aligned} \text{traz}(\alpha) &= \alpha(a, b) = \{\alpha(t), t \in (a, b)\} = \\ &= \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), t \in (a, b)\} = \{(t, f(t)), t \in (a, b)\} = \text{graf}(f) \end{aligned}$$

Dada por tanto $f \in C^1(a, b)$, existe $\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva regular plana, que cumple:

$$\text{traz}(\alpha) = \text{graf}(f)$$

c.s.q.d.

La lectura del resultado anterior no deja lugar a dudas:

Los grafos de las funciones $f \in C^1(a, b)$ son trazas de curvas regulares planas definidas en (a, b) .

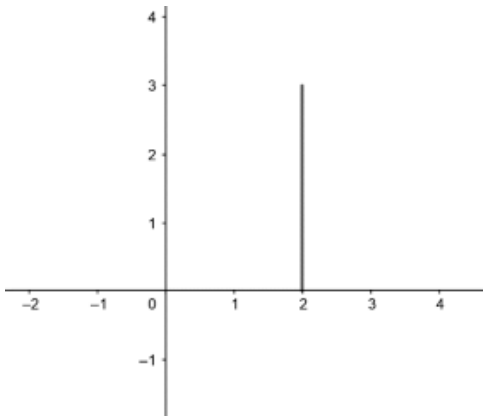
El recíproco sin embargo, no es cierto, basta considerar por ejemplo la función:

$$\begin{aligned}\alpha: (0,3) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (2, t)\end{aligned}$$

Para la que ocurre:

$\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(0,3)$ sin duda. También: $\alpha'_2(t) = 1, \forall t \in (0,3)$ y por tanto:

$\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0,0), \forall t \in (0,3)$. En consecuencia α es una curva regular plana.



Y sin embargo, no puede existir ninguna función real de variable real: $f: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que cumpla que: $\text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha)$

Pues de existir una tal función f tal que $\text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha)$, ocurriría para ella:
 $\text{graf}(f) = \{(x, f(x)), x \in \text{Dom}(f)\} = \{(2, t), t \in (0,3)\} = \text{traz}(\alpha)$
 i.e., ocurriría por ejemplo que:
 $(2,1) \in \text{graf}(f)$, y también:
 $(2,2) \in \text{graf}(f)$. Entonces:

$$\begin{aligned}\exists x \in \text{Dom}(f), \quad (x, f(x)) &= (2,1) \\ \exists y \in \text{Dom}(f), \quad (y, f(y)) &= (2,2)\end{aligned} \Rightarrow \exists x, y \in \text{Dom}(f), \begin{matrix} x = 2, & f(x) = 1 \\ y = 2, & f(y) = 2 \end{matrix}$$

i.e.: $x = y$ y sin embargo $f(x) \neq f(y)$

Y por tanto f no puede ser una función. ($\rightarrow \leftarrow$)

No existe, en consecuencia ninguna función real de variable real f cuyo grafo coincida con la traza de la curva regular plana α . En particular, no existirá ninguna función de clase 1, que lo cumpla.

Del resultado y de esta observación concluimos por tanto:

Los grafos de funciones $f \in C^1(a, b)$ son trazas de curvas regulares planas, pero podemos encontrar trazas de curvas regulares planas que no son grafos de ninguna función real de variable real de clase 1.

También lo podemos enunciar de la siguiente forma:

Toda función $f \in C^1(a, b)$ genera una curva regular plana en ecuaciones paramétricas, pero no toda curva regular plana proviene de una función $f \in C^1(a, b)$.

Para las representaciones cartesianas de grafos de funciones en coordenadas polares, podemos enunciar el siguiente resultado:

Proposición 2.4. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Sea:

$$\begin{aligned} f: (a, b) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) \end{aligned}$$

Y supongamos que $f \in C^1(a, b)$. Entonces, existe una curva regular plana α

$$\begin{aligned} \alpha: (c, d) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Tal que:

$$\text{traz}(\alpha) = \{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta), \theta \in (c, d)\} = \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f))$$

Demostración:

Tomemos $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y supongamos que:

$$\begin{aligned} f: (a, b) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) \end{aligned}$$

es una función definida en (a, b) y de clase 1 en (a, b) , i.e: $f \in C^1(a, b)$

Podemos considerar sin duda, la gráfica de f en coordenadas polares

$\text{graf}_{\text{pol}}(f)$ y también su representación cartesiana: $\psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f))$

i.e.,

$$\begin{aligned} \text{graf}_{\text{pol}}(f) &= \{(f(\theta), \theta), \theta \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi)\} \\ \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f)) &= \{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta), \theta \in (a, b)\} \end{aligned}$$

Vamos a definir ahora la siguiente correspondencia:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow \alpha(\theta) = (f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta) \end{aligned}$$

Sin duda α es una función que queda bien definida. Además:

Por álgebra de derivadas, siendo f una función derivable en (a, b)

y las funciones seno y coseno también derivables en (a, b) , tendremos que las funciones:

$\alpha_1(\theta) = f(\theta)\cos(\theta)$ y $\alpha_2(\theta) = f(\theta)\sin(\theta) \quad \forall \theta \in (a, b)$, son funciones derivables en (a, b) . Pero también:

$$\forall \theta \in (a, b), \quad \begin{cases} \alpha'_1(\theta) = f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\sin\theta \\ \alpha'_2(\theta) = f'(\theta)\sin\theta + f(\theta)\cos\theta \end{cases}$$

Y por álgebra de funciones continuas, siendo $f \in C^1(a, b)$, tendremos que tanto α'_1 como α'_2 son funciones continuas en (a, b) .

Luego: $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(a, b)$

Si suponemos, de otro lado, que: $\exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi)$, $\alpha'(\theta_0) = (0, 0)$.

Entonces:

$$\exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad \begin{cases} f'(\theta_0)\cos\theta_0 - f(\theta_0)\sin\theta_0 = 0 \\ f'(\theta_0)\sin\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad \begin{cases} f'(\theta_0)\cos\theta_0 = f(\theta_0)\sin\theta_0 \\ f'(\theta_0)\sin\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0 = 0 \end{cases}$$

Como además: $f(\theta_0) \neq 0$, tendremos:

$$\begin{aligned} \exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad &\begin{cases} \frac{f'(\theta_0)}{f(\theta_0)}\cos\theta_0 = \sin\theta_0 \\ f'(\theta_0)\sin\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad &\frac{(f'(\theta_0))^2}{f(\theta_0)}\cos\theta_0 + f(\theta_0)\cos\theta_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \frac{(f'(\theta_0))^2}{f(\theta_0)} \cos \theta_0 + \frac{(f(\theta_0))^2}{f(\theta_0)} \cos \theta_0 = 0 \\
 &\Rightarrow \frac{(f'(\theta_0))^2 \cos \theta_0 + (f(\theta_0))^2 \cos \theta_0}{f(\theta_0)} = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (f'(\theta_0))^2 \cos \theta_0 + (f(\theta_0))^2 \cos \theta_0 = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos \theta_0 [(f'(\theta_0))^2 + (f(\theta_0))^2] = 0
 \end{aligned}$$

Y como: $(f'(\theta_0))^2 + (f(\theta_0))^2 \geq (f(\theta_0))^2 > 0$. Entonces:

$$\cos \theta_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta_0 = \frac{\pi}{2} \\ \text{ó} \\ \theta_0 = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Tenemos así:

$$\text{Si } \exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad \alpha'(\theta_0) = 0 \Rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ó } \theta_0 = \frac{3\pi}{2}$$

Ahora bien:

$$\alpha'_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos \frac{\pi}{2} - f\left(\frac{\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0$$

Luego:

$$\alpha'\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq (0, 0)$$

Y:

$$\alpha'_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = f'\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cos \frac{3\pi}{2} - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \operatorname{sen} \frac{3\pi}{2} = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \neq 0$$

Luego:

$$\alpha'\left(\frac{3\pi}{2}\right) \neq (0, 0)$$

Así pues: $\nexists \theta \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \alpha'(\theta) = (0, 0)$

Por tanto: $\forall \theta \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \alpha'(\theta) \neq (0, 0)$

Es, en consecuencia α una curva regular plana.

Y no cabe duda por construcción, que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{traz}(\alpha) = \alpha(a, b) &= \{\alpha(\theta), \quad \theta \in (a, b)\} = \{(\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)), \quad \theta \in (a, b)\} = \\
 &= \{(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \operatorname{sen}(\theta)), \quad \theta \in (a, b)\} = \psi\left(\operatorname{graf}_{\operatorname{pol}}(f)\right) \\
 &\quad \underline{\text{c.s.q.d.}}
 \end{aligned}$$

El resultado es igual de claro que el anterior. Si:

$$f: (a, b) \subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty)$$

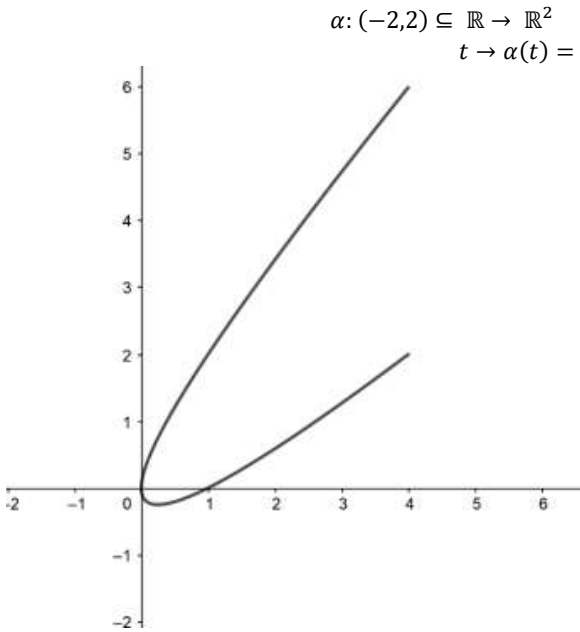
es una función de clase 1 en (a, b) , entonces la representación cartesiana del grafo de f en coordenadas polares es también la traza de una curva regular plana.

Y debemos hacernos la misma pregunta que para el resultado anterior:

¿Todas las trazas de curvas regulares planas son representaciones cartesianas de grafos de funciones en coordenadas polares?

Bien, pues veamos un ejemplo que da respuesta a nuestra pregunta:

Tomemos la función:



Ocorre para esta función lo siguiente:

Sin duda α_1 y α_2 son funciones de clase 1 en el intervalo $(-2,2)$

Por álgebra de derivadas y por álgebra de funciones continuas.

Además.

$\forall t \in (-2,2)$,

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \\ &= (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \\ &= (2t, 2t + 1)\end{aligned}$$

De otro lado, si ocurriera que:

$$\exists t_0 \in (-2,2), \alpha'(t_0) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \exists t_0 \in (-2,2), \quad \alpha'(t_0) = (2t_0, 2t_0 + 1) = (0,0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \exists t_0 \in (-2,2), \quad \begin{cases} 2t_0 = 0 \\ 2t_0 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t_0 = 0 \\ t_0 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (\rightarrow \leftarrow)$$

Luego:

$$\nexists t_0 \in (-2,2), \quad \alpha'(t_0) = (0,0)$$

i.e.,

$$\forall t \in (-2,2), \quad \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0,0)$$

Por tanto α es una curva regular plana, cuya traza es sin duda:

$$\text{traz}(\alpha) = \alpha(-2,2) = \{(t^2, t^2 + t), \quad t \in (-2,2)\}$$

Si ocurriera que la traza de nuestra curva fuera la representación cartesiana de la gráfica de alguna función $f \in C^1(a, b)$ en coordenadas polares.

$$f: (a, b) \subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty)$$

i.e., si existiera una función $f \in C^1(a, b)$ tal que:

$$\{(f(\theta)\cos\theta, f(\theta)\sin\theta), \quad \theta \in (a, b)\} = \{(t^2, t^2 + t), \quad t \in (-2,2)\}$$

Tal función debe cumplir por ejemplo que:

$$\exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), (f(\theta_0)\cos\theta_0, f(\theta_0)\sin\theta_0) = \alpha(-1) = (1,0)$$

$$\Rightarrow \exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad \begin{cases} f(\theta_0)\cos\theta_0 = 1 \\ f(\theta_0)\sin\theta_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Como $f(\theta_0) > 0 \Rightarrow \sin\theta_0 = 0 \Rightarrow$ obligatoriamente $\theta_0 = \pi$.

Luego:

$$\text{si } \exists \theta_0 \in (a, b) \subseteq [0, 2\pi), \quad (f(\theta_0)\cos\theta_0, f(\theta_0)\sin\theta_0) = \alpha(-1) = (1,0)$$

Necesariamente, tal θ_0 es $\theta_0 = \pi$.

Pero si $\theta_0 = \pi$, como $f(\theta_0) \cos \theta_0 = 1 \Rightarrow f(\pi) \cos \pi = 1 \Rightarrow f(\pi) = -1$

Cosa que no puede ocurrir.

Tenemos por tanto que no puede existir tal función f .

Encontramos de esta manera, una curva regular plana α cuya traza no es la representación cartesiana del grafo de ninguna función f de clase 1 en coordenadas polares.

Dejan claro los dos resultados anteriores y sus observaciones que, de las tres “maneras” de generar gráficas (de clase 1) en $\mathbb{R}^2$ que conocemos, la más general es sin duda la que nos dan las curvas regulares planas en sus ecuaciones paramétricas, que engloba a todas las demás.

Desde esta óptica, estudiando las curvas regulares planas, estaremos estudiando en particular los grafos de funciones de clase 1 y las representaciones cartesianas de grafos de funciones de clase 1 en coordenadas polares.

Vamos ahora a intentar averiguar en los apartados que siguen, si el cálculo diferencial nos puede ayudar, y de qué manera en el estudio del comportamiento y representación de las curvas regulares planas.

Capítulo 3

APLICACIONES DEL CÁLCULO DIFERENCIAL AL ESTUDIO DE CURVAS REGULARES PLANAS

3. Aplicaciones del cálculo diferencial al estudio de curvas regulares planas.

Tomando como modelo el estudio de representación de grafos de funciones y la forma en la que ayuda la herramienta del cálculo diferencial, vamos a perseguir la generalización de estos métodos para un conjunto mayor de gráficas en el plano, las curvas regulares planas.

Es importante para este objetivo, tener una idea al menos, de cuales son las curvas regulares planas que “proviene” de funciones reales de variable real de clase 1.

Por aquí empezaremos.

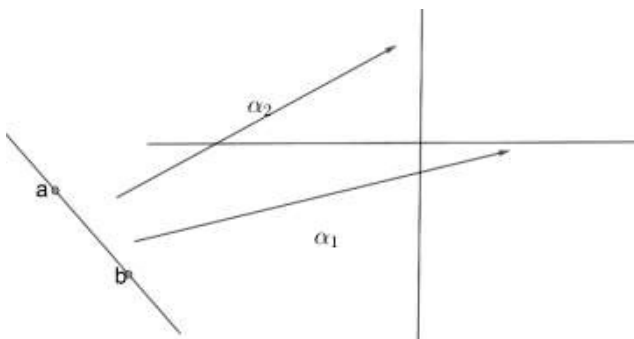
Observemos en principio lo siguiente:

En una curva regular plana

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

La componente α_1 marca la relación existente entre el intervalo (a, b) y la proyección sobre el eje OX de la traza de α .



Una buena relación entre ambos, es indispensable por ejemplo para que puntos distintos del parámetro t no originen puntos en la traza de α con la misma proyección sobre el eje OX , algo que anularía nuestra esperanza de que la traza de α fuera el grafo de alguna función f .

Parece según esto, que “el buen comportamiento” de la función α_1 es algo necesario para nuestras pretensiones.

Vamos a enunciar sin más preámbulos el siguiente resultado, que viene a confirmar nuestra sospecha.

Teorema 3.1 Sea una curva regular plana:

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:

1. $\alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$
2. $\exists (c, d) \subseteq \mathbb{R} \text{ y } \exists f \in C^1(c, d), \text{ traz}(\alpha) = \text{graf}(f)$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

1 $\rightarrow$ 2) Y supongamos que se cumple que:

$$\forall t \in (a, b), \quad \alpha'_1(t) \neq 0$$

Este hecho tiene varias consecuencias:

En principio, y puesto que $\alpha_1 \in C^1(a, b)$, ocurre que α'_1 es una función continua en (a, b) y $\forall t \in (a, b), \alpha'_1(t) \neq 0$. Esto obliga necesariamente a que:

$$\begin{aligned} &\text{ó bien } \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ &\text{ó bien } \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Pues de no ocurrir esto, i.e.,

$$\text{si } \exists t_0, t_1 \in (a, b), \quad t_0 < t_1, \quad \alpha'_1(t_0) \alpha'_1(t_1) < 0$$

Tendríamos una función α'_1 continua en $[t_0, t_1] \subseteq (a, b)$, que cambia de signo en los extremos del intervalo y en consecuencia en virtud del teorema de Bolzano, tendríamos que $\exists s \in (t_0, t_1), \alpha'_1(s) = 0$. Hecho que contradice nuestra hipótesis.

Ocurre entonces obligatoriamente que:

$$\begin{aligned} &\text{ó bien } \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ &\text{ó bien } \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Por una consecuencia del Teorema del Valor Medio de Lagrange, tendremos ahora:

$$\text{Si } \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b)$$

$$\text{Si } \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b)$$

Y en cualquier caso, que α_1 es una aplicación inyectiva en (a, b) y biyectiva considerada sobre $\alpha_1(a, b)$.

Existe por tanto y tiene sentido considerarla la función α_1^{-1} inversa de α_1 .

$$\alpha_1^{-1}: \alpha_1(a, b) \rightarrow (a, b)$$

Otra consecuencia que tiene el que α_1 cumpla nuestra hipótesis, es la siguiente:

Tomemos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$ y consideremos $t_0 \in (a, b), \alpha_1(t_0) = x_0$

Tomemos:

$$\delta = \min \left\{ \frac{t_0 - a}{2}, \frac{b - t_0}{2} \right\} > 0$$

Y consideramos la función:

$$\begin{aligned} &\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \rightarrow \mathbb{R} \\ &t \mapsto \alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]}(t) = \alpha_1(t) \end{aligned}$$

Para tal función ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \text{ es continua en} \\ &[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \end{aligned}$$

$$\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \text{ es estrictamente creciente ó estrictamente decreciente en } [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$$

$$\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]} \text{ es diferenciable en } t_0 \text{ y } (\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]})'(t_0) = \alpha'_1(t_0) \neq 0$$

En virtud entonces del resultado sobre la derivada de la función inversa, podemos asegurar que:

$$(\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]})^{-1} \text{ es diferenciable en } \alpha_1(t_0) = x_0 \text{ y}$$

$$\left((\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]})^{-1} \right)'(x_0) = \frac{1}{(\alpha_1|_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta]})'(t_0)}$$

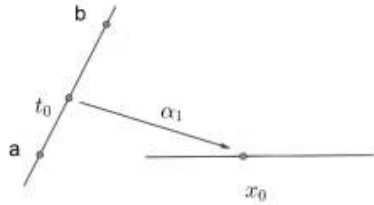
i.e.,

$$\alpha_1^{-1} \text{ es diferenciable en } \alpha_1(t_0) = x_0 \text{ y } (\alpha_1^{-1})'(x_0) = \frac{1}{\alpha'_1(t_0)}$$

Es por tanto α_1^{-1} una función diferenciable en $\alpha_1(a, b)$ y

$$\forall x_0 \in \alpha_1(a, b), \quad (\alpha_1^{-1})'(x_0) = \frac{1}{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))}$$

A la vista además de como queda definida $(\alpha_1^{-1})'$ en $\alpha_1(a, b)$, si tomamos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$ tendremos:



$$\begin{aligned} \alpha_1^{-1} \text{ es continua en } x_0 \text{ (por ser derivable en } x_0) \\ \alpha'_1 \text{ es continua en } \alpha_1^{-1}(x_0) \\ \alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0)) \neq 0 \text{ pues } \alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Entonces, por álgebra y composición de funciones continuas, tendremos que $(\alpha_1^{-1})'$ es una función continua en x_0 , y esto $\forall x_0 \in \alpha_1(a, b)$, i.e., $(\alpha_1^{-1})'$ es una función continua en $\alpha_1(a, b)$, y por tanto: $(\alpha_1^{-1})' \in C^1(\alpha_1(a, b))$

Por último, siendo α_1 una función continua y (a, b) un conjunto conexo, tenemos por un resultado relativo a funciones continuas definidas sobre conjuntos conexos, que $\alpha_1(a, b)$ es un conjunto conexo, y por tanto, por un resultado conocido de topología, que $\alpha_1(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo de la recta real.

Más aún:

Si α_1 es estrictamente creciente y tomamos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$, ocurre:

$$\exists t_0 \in (a, b), \quad \alpha_1(t_0) = x_0$$

Como (a, b) es un conjunto abierto para la topología métrica de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exists \delta > 0, \quad t_0 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (a, b) \Rightarrow \\ \Rightarrow \exists \rho > 0, \quad t_0 \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \subseteq (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (a, b) \end{aligned}$$

Y como α_1 es una función estrictamente creciente:

$$\alpha_1(t_0 - \rho) < \alpha_1(t_0) < \alpha_1(t_0 + \rho) \Rightarrow \alpha_1(t_0) \in (\alpha_1(t_0 - \rho), \alpha_1(t_0 + \rho))$$

De otro lado: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(a, b) \text{ es un intervalo} \\ \alpha_1(t_0 - \rho), \alpha_1(t_0 + \rho) \in \alpha_1(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha_1(t_0 - \rho), \alpha_1(t_0 + \rho)) \subseteq \alpha_1(a, b)$$

i.e., $x_0 = \alpha_1(t_0) \in (\alpha_1(t_0 - \rho), \alpha_1(t_0 + \rho)) \subseteq \alpha_1(a, b)$

Es por tanto, si α_1 es una función estrictamente creciente, $\alpha_1(a, b)$ un intervalo abierto.

Y si α_1 es estrictamente decreciente y tomamos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$, ocurre:

$$\exists t_0 \in (a, b), \quad \alpha_1(t_0) = x_0$$

Como (a, b) es abierto, entonces: $\exists \delta > 0, \quad t_0 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (a, b)$

Y $\exists \rho > 0, \quad t_0 \in [t_0 - \rho, t_0 + \rho] \subseteq (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (a, b)$

Como α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\alpha_1(t_0 - \rho) > \alpha_1(t_0) > \alpha_1(t_0 + \rho)$$

i.e.: $\alpha_1(t_0) \in (\alpha_1(t_0 + \rho), \alpha_1(t_0 - \rho))$

Y como: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(a, b) \text{ es un intervalo} \\ \alpha_1(t_0 + \rho), \alpha_1(t_0 - \rho) \in \alpha_1(a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\alpha_1(t_0 + \rho), \alpha_1(t_0 - \rho)) \subseteq \alpha_1(a, b)$$

Luego: $x_0 = \alpha_1(t_0) \in (\alpha_1(t_0 + \rho), \alpha_1(t_0 - \rho)) \subseteq \alpha_1(a, b)$

En este caso (cuando α_1 es estrictamente decreciente), también es $\alpha_1(a, b)$ un intervalo abierto.

En cualquier caso como vemos: $\alpha_1(a, b)$ es un intervalo abierto.

Vamos a definir ahora la siguiente correspondencia:

$$f: \alpha_1(a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) = \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))$$

Ocurre lo siguiente:

$$\text{Si } x \in \alpha_1(a, b) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(x) \in (a, b) \Rightarrow \exists \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) \in \mathbb{R}$$

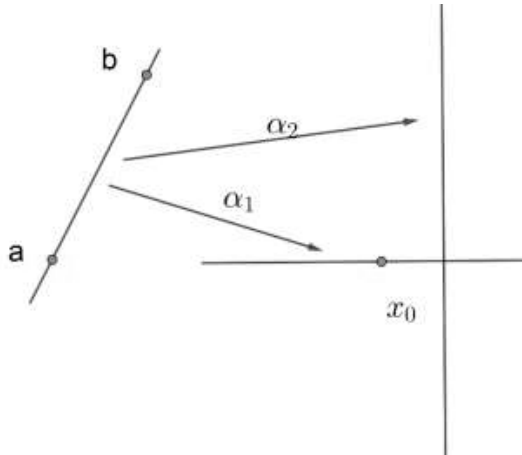
Siendo α_1^{-1} y α_2 aplicaciones, tendremos que lo será $(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})$.

Es f por tanto una aplicación que queda bien definida.

También ocurre:

Según lo anterior: $\alpha_1^{-1} \in C^1(\alpha_1(a, b))$

Y por hipótesis: $\alpha_2 \in C^1(a, b)$



Si tomamos entonces

$x_0 \in \alpha_1(a, b)$,

tendremos:

α_1^{-1} es derivable en x_0

α_2 es derivable en

$\alpha_1^{-1}(x_0)$. Entonces, por la regla de la cadena:

$(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})$ es derivable en x_0 , y:

$$(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})'(x_0) = \alpha_2'(\alpha_1^{-1}(x_0)) (\alpha_1^{-1})'(x_0)$$

Y esto sin duda $\forall x_0 \in \alpha_1(a, b)$, i.e.,

f es diferenciable en $\alpha_1(a, b)$ y $\forall x \in \alpha_1(a, b)$,

$$f'(x) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})'(x) = \alpha_2'(\alpha_1^{-1}(x)) (\alpha_1^{-1})'(x)$$

Pero además, puesto que: $\alpha_1^{-1} \in C^1(\alpha_1(a, b))$ y $\alpha_2 \in C^1(a, b)$, si tomamos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$, ocurrirá:

De un lado:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1^{-1} \text{ es continua en } x_0 \\ \alpha_2' \text{ es continua en } \alpha_1^{-1}(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha_2' \circ \alpha_1^{-1}) \text{ es continua en } x_0$$

De otro lado:

$$(\alpha_1^{-1})' \text{ es continua en } x_0$$

Por álgebra de funciones continuas, será: $(\alpha_2' \circ \alpha_1^{-1}) (\alpha_1^{-1})'$ continua en x_0

i.e., f' es continua en x_0 . Y esto ocurre: $\forall x_0 \in \alpha_1(a, b)$

Así pues: $f \in C^1(\alpha_1(a, b))$

Vamos a considerar ahora entonces, el grafo de la función f .

$$\text{graf}(f) = \{(x, f(x)), \quad x \in \alpha_1(a, b)\} = \{(x, (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)), \quad x \in \alpha_1(a, b)\}$$

Ocurre lo siguiente:

$$\text{Si } (u, v) \in \text{graf}(f) \Rightarrow \exists x \in \alpha_1(a, b), \quad (u, v) = (x, \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)))$$

Pero si $x \in \alpha_1(a, b) \Rightarrow \exists ! t \in (a, b), \alpha_1(t) = x$. Entonces:

$$\begin{aligned} (u, v) &= (x, \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))) = (\alpha_1(t), \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t)))) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ &\Rightarrow (u, v) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad t \in (a, b) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (u, v) \in \text{traz}(\alpha)$$

i.e., ocurre que: $\text{graf}(f) \subseteq \text{traz}(\alpha)$

Y recíprocamente:

$$\begin{aligned} \text{Si } (u, v) \in \text{traz}(\alpha) &\Rightarrow \exists t \in (a, b), \quad (u, v) = \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u, v) = \left(\alpha_1(t), \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t))) \right), \quad \alpha_1(t) \in \alpha_1(a, b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u, v) = \left(\alpha_1(t), f(\alpha_1(t)) \right), \quad \alpha_1(t) \in \alpha_1(a, b) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (u, v) \in \text{graf}(f) \end{aligned}$$

Luego también ocurre, que: $\text{traz}(\alpha) \subseteq \text{graf}(f)$

Y de las dos inclusiones, tendremos:

$$\text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha)$$

Ocorre por tanto, que:

$$\text{si } \alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow \exists f \in C^1(\alpha_1(a, b)), \quad \text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha)$$

i.e.,

$$\text{si } \alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$$

$\Rightarrow$ la traza de α es grafo de alguna función f de clase 1 en un intervalo abierto (c, d)

2 $\rightarrow$ 1) Recíprocamente, supongamos ahora que la traza de α es grafo de alguna función f de clase 1 en un intervalo abierto (c, d) , i.e: supongamos que: $\exists (c, d) \subseteq \mathbb{R}$ y $\exists f \in C^1(c, d)$, que cumplen que: $\text{traz}(\alpha) = \text{graf}(f)$

Si tomamos entonces: $t \in (a, b)$ arbitrario, ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha(t) \in \text{traz}(\alpha) = \text{graf}(f) \Rightarrow \exists x \in (c, d), (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) = (x, f(x)) \\ &\Rightarrow \exists x \in (c, d), \left. \begin{array}{l} \alpha_1(t) = x \\ \alpha_2(t) = f(x) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha_2(t) = f(x) = f(\alpha_1(t)) \end{aligned}$$

Ocorre por tanto, bajo nuestra hipótesis que:

$$\forall t \in (a, b), \quad \alpha_2(t) = (f \circ \alpha_1)(t)$$

Si ocurriera entonces que para algún $t_0 \in (a, b)$, $\alpha'_1(t_0) = 0$, como:

$$\alpha'_2(t_0) = (f \circ \alpha_1)'(t_0) = f'(\alpha_1(t_0)) \alpha'_1(t_0) \Rightarrow \alpha'_2(t_0) = 0$$

$$\text{i.e., } \exists t_0 \in (a, b), \quad \alpha'(t_0) = (\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0)) = (0, 0)$$

No sería por tanto α una curva regular plana. ($\rightarrow \leftarrow$)

No puede ocurrir por tanto que: $\exists t_0 \in (a, b)$, $\alpha'_1(t_0) = 0$

Ocorre así, desde nuestra hipótesis, que:

$$\forall t \in (a, b), \quad \alpha'_1(t) \neq 0$$

Luego también:

$$\text{Si } \exists (c, d) \subseteq \mathbb{R} \text{ y } \exists f \in C^1(c, d), \quad \text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha) \Rightarrow \alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

c.s.q.d.

Nos dice el resultado, cuales son exactamente las curvas regulares planas cuya traza es grafo de alguna función f de clase 1.

No podemos desaprovechar la ocasión que nos brinda este resultado para poder ver una misma “gráfica” en el plano bajo dos ópticas diferentes, como traza de una curva regular plana y como grafo de una función real de variable real de clase 1, especialmente cuando desde una de las

ópticas tenemos una interpretación geométrica del concepto de derivada y desde la otra pretendemos tenerla.

Vamos a intentar entonces, al menos para esta clase de curvas regulares planas, ver en qué se traduce esta interpretación geométrica.

Tomemos para ello una curva regular plana:

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Para la cual ocurra que: $\alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$

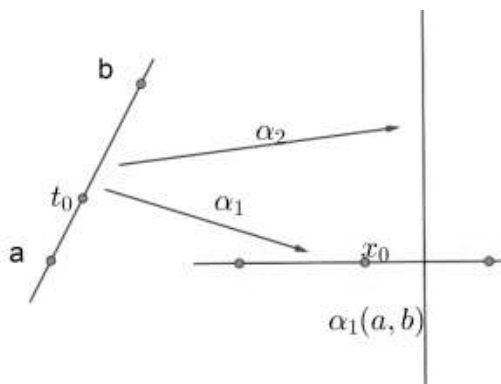
Sabemos entonces, por el resultado anterior, que la función:

$$f: \alpha_1(a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)$$

es una función $f \in C^1(\alpha_1(a, b))$ tal que $\text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha)$

Fijemos un $t_0 \in (a, b)$ y notemos por $x_0 = \alpha_1(t_0)$



$$\alpha(t_0) =$$

$$(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0)) =$$

$$= (\alpha_1(t_0), \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0)))) = (\alpha_1(t_0), (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t_0))) =$$

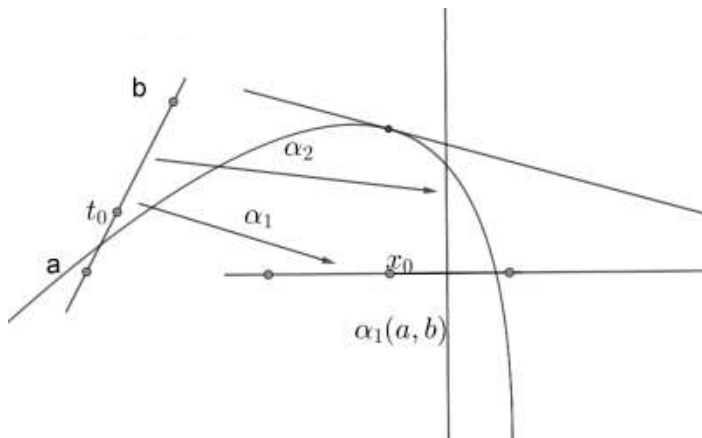
$$= (\alpha_1(t_0), f(\alpha_1(t_0))) = (x_0, f(x_0))$$

Recordemos que en esta situación, $f'(x_0)$ es la pendiente de la recta tangente a $\text{graf}(f)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$, i.e., $f'(x_0)$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente a $\text{graf}(f)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ con el eje de abscisas.

Ahora bien según nuestro resultado: $(x_0, f(x_0)) = (\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$

Y además:

$$f'(x_0) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})'(x_0) = \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0)) (\alpha_1^{-1})'(x_0) = \alpha'_2(t_0) \frac{1}{\alpha'_1(t_0)} = \frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)}$$



Podemos leer lo anterior de esta forma:
 $\frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)}$ es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta

tangente a $\text{traz}(\alpha)$ en el punto $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ con el eje de abscisas.

De otro lado el número $\frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)}$ también es la tangente trigonométrica del ángulo que forma el vector $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$ con el eje de abscisas, i.e: la recta tangente a $\text{traz}(\alpha)$ en el punto $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ y las rectas que tienen por dirección $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$ tienen la misma pendiente y por tanto son todas paralelas.

La recta pues, que pasa por el punto $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ y tiene dirección: $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$ no es otra que la recta tangente a $\text{traz}(\alpha)$ en el punto: $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$.

El vector $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$ marca de esta manera la dirección de la recta tangente a $\text{traz}(\alpha)$ en el punto $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$.

Según lo anterior, si α es una curva regular plana:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \alpha(t) &= (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

tal que: $\alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$, entonces el vector $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$ marca la dirección de la recta tangente a $\text{traz}(\alpha)$ en el punto $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$, i.e., la recta tangente a $\text{traz}(\alpha)$ en el punto $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ es la recta que pasa por $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ y tiene dirección $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$

Recordemos ahora que cuando se estudia la diferenciabilidad en cualquier texto se utiliza la interpretación geométrica de $f'(x_0)$ para definir el concepto de recta tangente, algo que sólo teníamos definido para grafo de funciones.

Generalizar por tanto este concepto de manera “consistente” para todas las curvas regulares planas, está ahora a nuestro alcance.

Definición 3.2 Sea α una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \alpha(t) &= (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Llamamos **vector tangente ó vector velocidad** a la curva α en el punto $t_0 \in (a, b)$, al vector $\alpha'(t_0) = (\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$.

Llamamos **recta tangente** a la curva α en el punto t_0 a la recta que pasa por $(\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0))$ y tiene como dirección el vector $(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0))$

Hagamos alguna observación sobre nuestra definición antes de seguir:

Observaciones:

1. La definición es, sin duda una definición “consistente”. Generaliza el concepto de recta tangente en un punto a cualquier curva regular plana, conservando la misma recta tangente que teníamos definida para el caso particular de curvas regulares planas cuya traza sea el grafo de alguna función de clase 1.

2. Otra observación importante es, que conviene recalcar que tanto el concepto de vector tangente como el de recta tangente, son conceptos que estamos definiendo para cada curva regular plana y no para sus trazas (recordemos que una misma traza puede ser asociada a más de una curva)

3.1 Crecimiento o decrecimiento de una curva

Siguiendo con nuestro propósito, vamos a intentar hablar ahora sobre lo que entendemos por “crecimiento” ó “decrecimiento” de una curva regular plana.

A menos que establezcamos previamente un orden en $\mathbb{R}^2$, con el que podamos comparar $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ siendo

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

una curva regular plana y $t, s \in (a, b)$, hemos de desterrar la idea de definir estos conceptos de manera análoga a como lo hacíamos para funciones reales de variable real. Tenemos de otro lado el condicionante de que la traza de parte de las curvas regulares planas son grafos de funciones reales de variable real.

Necesitamos por tanto, **una definición de “crecimiento” para curvas, acorde con el crecimiento de las funciones, en los casos en los que ocurra que la traza de la curva sea el grafo de alguna función.**

Una definición que en principio parece que pueda respetar nuestra pretensión es la siguiente:

Definición 3.3 Sea α una curva regular plana

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Decimos que α es **estrictamente creciente en $(c, d) \subseteq (a, b)$** si:

$$\forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

Decimos que α es **estrictamente decreciente en $(c, d) \subseteq (a, b)$** si:

$$\forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0$$

Antes de seguir, veamos que efectivamente la definición que estamos dando sobre crecimiento ó decrecimiento de una curva regular plana α cuya traza es el grafo de alguna función f de clase 1 es compatible con la definición de crecimiento que tenemos para la función f . Vamos para ello, a intentar probar el siguiente resultado:

Teorema 3.4 Sea α una curva regular plana cuya traza sea grafo de una función f de clase 1.

$$\begin{aligned}\alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

Sea $(c, d) \subseteq (a, b)$. Entonces:

1. α es estrictamente creciente en (c, d)
 $\leftrightarrow f$ es estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d)$
2. α es estrictamente decreciente en (c, d)
 $\leftrightarrow f$ es estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$

Demostración:

Tomemos una curva regular plana α cuya traza sea grafo de una función f de clase 1.

$$\begin{aligned}\alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

Sabemos por un resultado anterior que en estas condiciones, es:

$$\alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

y tal función f de clase 1, no es otra que la que queda definida en la forma:

$$\begin{aligned}f: \alpha_1(a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)\end{aligned}$$

Tomemos $(c, d) \subseteq (a, b)$.

1. $\rightarrow$ y supongamos que α es estrictamente creciente en (c, d) .

Por ser $\alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b)$ y ser $\alpha_1 \in C^1(a, b)$, pueden ocurrir dos cosas:

(i) que $\alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b)$ ó (ii) que $\alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b)$

(i) Si ocurre que $\alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es una función estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1^{-1}$ es también una función estrictamente creciente en $\alpha_1(a, b)$ (esto lo sabemos por resultados relativos a continuidad). Entonces en particular es α_1^{-1} una función estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d) \subseteq \alpha_1(a, b)$.

Si tomamos entonces: $x, y \in \alpha_1(c, d), \quad x < y$ tendremos:

De un lado:

$$\alpha_1^{-1}(x) < \alpha_1^{-1}(y)$$

Y de otro, por ser α estrictamente creciente en (c, d) :

$$\begin{aligned}(\alpha_2(\alpha_1^{-1}(y)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))) (\alpha_1(\alpha_1^{-1}(y)) - \alpha_1(\alpha_1^{-1}(x))) &> 0 \Rightarrow \\ ((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)) (y - x) &> 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)) &> 0 \Rightarrow f(y) - f(x) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) &< f(y)\end{aligned}$$

i.e., en este caso:

$$\text{si } x, y \in \alpha_1(c, d), \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Y por tanto f es una función estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d)$.

(ii) Si ocurre que: $\alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es una función estrictamente decreciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1^{-1}$ es estrictamente decreciente en $\alpha_1(a, b)$, en particular α_1^{-1} es una función estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d) \subseteq \alpha_1(a, b)$.

Si tomamos entonces: $x, y \in \alpha_1(c, d), \quad x < y$ tendremos:

De un lado:

$$\alpha_1^{-1}(x) > \alpha_1^{-1}(y) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(y) < \alpha_1^{-1}(x)$$

Y de otro lado por ser α estrictamente creciente en (c, d) :

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(y)) \right) \left(\alpha_1(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha_1(\alpha_1^{-1}(y)) \right) > 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) \right) (x - y) > 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) \right) < 0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow f(x) < f(y) \end{aligned}$$

Luego también en este caso:

$$\text{Si } x, y \in \alpha_1(c, d), \quad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

Y por tanto f es una función estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d)$

En cualquier caso, como vemos, bajo nuestra condición de que α sea una función estrictamente creciente en (c, d) , se cumple que f es una función estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d)$

←) Recíprocamente, supongamos ahora que la función f es estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d)$.

Puede volver a ocurrir: (i) $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b)$ ó (ii) $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b)$

(i) Si ocurre que: $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente creciente en (c, d) .

Si tomamos entonces: $t, s \in (c, d), t < s$. Tendremos:

De un lado:

$$\alpha_1(t) < \alpha_1(s)$$

Y de otro:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1(t)) < f(\alpha_1(s)) & \Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t)) < (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(s)) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t))) < \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(s))) \Rightarrow \alpha_2(t) < \alpha_2(s) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\alpha_1(t) < \alpha_1(s) \quad y \quad \alpha_2(t) < \alpha_2(s)$$

Entonces:

$$(\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

i.e.,

$$\text{Si } t, s \in (c, d), \quad t < s \Rightarrow (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

Por tanto en este caso es α estrictamente creciente en (c, d)

(ii) Si ocurre que: $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente decreciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente decreciente en (c, d) . Si tomamos entonces: $t, s \in (c, d), t < s$, tendremos:

De un lado:

$$\alpha_1(t) > \alpha_1(s) \Rightarrow \alpha_1(s) < \alpha_1(t)$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1(s)) < f(\alpha_1(t)) & \Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(s)) < (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t)) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(s))) < \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t))) \Rightarrow \alpha_2(s) < \alpha_2(t) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\alpha_1(s) < \alpha_1(t) \quad y \quad \alpha_2(s) < \alpha_2(t)$$

Entonces:

$$(\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

i.e.,

$$\text{Si } t, s \in (c, d), \quad t < s \Rightarrow (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

También es en este caso α estrictamente creciente en (c, d)

Luego en cualquier caso, se cumple:

Si f es estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d) \Rightarrow \alpha$ es estrictamente creciente en (c, d)

2. $\rightarrow$ Supongamos que α es estrictamente decreciente en (c, d) .

Nuevamente: (i) $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b)$ ó (ii) $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b)$

(i) Si ocurre que: $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente creciente en $(c, d) \Rightarrow \alpha_1^{-1}$ es estrictamente creciente en $\alpha_1(c, d)$

Si tomamos entonces: $x, y \in \alpha_1(c, d), x < y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{-1}(x) < \alpha_1^{-1}(y) \\ \alpha_1^{-1}(x), \alpha_1^{-1}(y) \in (c, d) \end{array} \right\} &\Rightarrow \text{como } \alpha \text{ es estrictamente decreciente} \\ &\Rightarrow \left(\alpha_2(\alpha_1^{-1}(y)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) \right) \left(\alpha_1(\alpha_1^{-1}(y)) - \alpha_1(\alpha_1^{-1}(x)) \right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) \right) (y - x) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) < 0 \Rightarrow f(y) - f(x) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

i.e., en este caso es f estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$

Y si:

(ii) Ocurre: $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (c, d) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente decreciente en $(c, d) \Rightarrow \alpha_1^{-1}$ es estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$. Si tomamos entonces:

$x, y \in \alpha_1(c, d), x < y$. Tendremos:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1^{-1}(y) < \alpha_1^{-1}(x) \\ \alpha_1^{-1}(x), \alpha_1^{-1}(y) \in (c, d) \end{array} \right\} &\Rightarrow \text{como } \alpha \text{ es estrictamente decreciente en } (c, d) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(y)) \right) \left(\alpha_1(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha_1(\alpha_1^{-1}(y)) \right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left((\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) \right) (x - y) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) - (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(y) > 0 \Rightarrow f(x) - f(y) > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) > f(y) \end{aligned}$$

i.e., f es estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$ también en este caso.

En cualquier caso por tanto:

$$\begin{aligned} &\text{Si } \alpha \text{ es estrictamente decreciente en } (c, d) \\ &\Rightarrow f \text{ es estrictamente decreciente en } \alpha_1(c, d) \end{aligned}$$

$\leftarrow$ Recíprocamente, supongamos ahora que f es estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$.

Una vez más ocurre: (i) $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b)$ ó (ii) $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b)$

(i) Si ocurre que: $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \Rightarrow$

α_1 es estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente creciente en (c, d)

Si tomamos entonces: $t, s \in (c, d), t < s \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(t) < \alpha_1(s) \\ \alpha_1(t), \alpha_1(s) \in \alpha_1(c, d) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

Como f es estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(\alpha_1(t)) > f(\alpha_1(s)) \Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t)) > (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(s)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t))) > \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(s))) \Rightarrow \alpha_2(t) > \alpha_2(s) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\text{Si } t, s \in (c, d), \quad t < s \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1(t) < \alpha_1(s) \\ \alpha_2(t) > \alpha_2(s) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(s) - \alpha_1(t) > 0 \\ \alpha_2(s) - \alpha_2(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0$$

Y por tanto α es estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$

(ii) Y si $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente decreciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente decreciente en (c, d) .

Si tomamos: $t, s \in (c, d), t < s$, tendremos:

$\alpha_1(t) > \alpha_1(s)$. Y como además, es f estrictamente decreciente en $\alpha_1(c, d)$, entonces:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1(t)) < f(\alpha_1(s)) &\Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t)) < (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(s)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t))) < \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\alpha_1(s))) \Rightarrow \alpha_2(t) < \alpha_2(s) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \text{Si } t, s \in (c, d), \quad t < s &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) > \alpha_1(s) \\ \alpha_2(t) < \alpha_2(s) \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(s) - \alpha_1(t) < 0 \\ \alpha_2(s) - \alpha_2(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0 \end{aligned}$$

Es también en este caso, α una curva estrictamente decreciente en (c, d)

En cualquier caso:

$$\begin{aligned} \text{Si } f \text{ es estrictamente decreciente en } \alpha_1(c, d) \\ \Rightarrow \alpha \text{ es estrictamente decreciente en } (c, d) \\ \underline{\text{c.s.q.d.}} \end{aligned}$$

Es por tanto, el concepto de crecimiento o decrecimiento para una curva plana, un concepto que (en cierta forma) generaliza el concepto de crecimiento o decrecimiento para funciones.

Una observación interesante, es la siguiente:

Si tomamos una curva regular plana:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Y suponemos que α es estrictamente creciente en $(c, d) \subseteq (a, b)$

Tenemos, que si fijamos $t, s \in (c, d), t < s$, ocurre que:

$$(\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

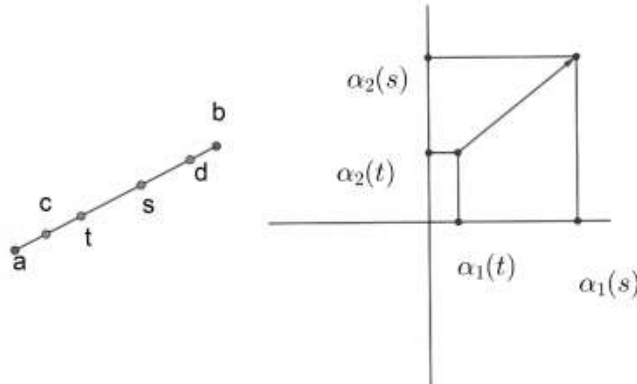
i.e: $(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))$ y $(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))$ tienen el mismo signo.

En otras palabras:

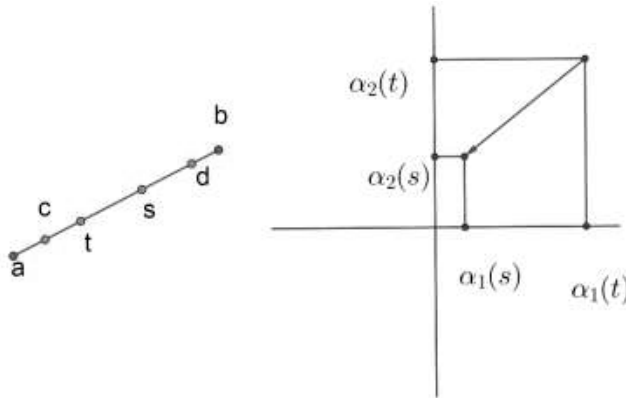
- O bien $\alpha_2(s) > \alpha_2(t)$ y $\alpha_1(s) > \alpha_1(t)$
- O bien $\alpha_2(s) < \alpha_2(t)$ y $\alpha_1(s) < \alpha_1(t)$

En el primer caso ocurre que el vector $(\alpha_1(s) - \alpha_1(t), \alpha_2(s) - \alpha_2(t))$ tiene sus dos componentes positivas, i.e: el vector de origen $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y extremo $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ tiene sus dos coordenadas positivas.

Entonces la secante que une los puntos de nuestra curva $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ tiene pendiente positiva. Y esto ocurre $\forall t, s \in (c, d), t < s$



En el segundo caso, el vector $(\alpha_1(s) - \alpha_1(t), \alpha_2(s) - \alpha_2(t))$ tiene sus componentes negativas, i.e: el vector de origen $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y extremo $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ tiene sus dos coordenadas negativas. Por tanto la cuerda que une los puntos $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y $(\alpha_1(s), \alpha_2(s))$ tiene pendiente positiva, y esto: $\forall t, s \in (c, d), t < s$.



Luego si α es estrictamente creciente en (c, d) , tenemos que:

$\forall t, s \in (c, d), t < s$, la cuerda que une los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ tiene pendiente positiva.

Pero ocurre que el recíproco no es menos cierto, pues si pasara que:

$\forall t, s \in (c, d), t < s$, la pendiente de la cuerda que une los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ fuera positiva, entonces:

$$\begin{aligned} \forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} > 0 &\Rightarrow \\ \forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t))(\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0 &\Rightarrow \\ \alpha \text{ es estrictamente creciente en } (c, d) \end{aligned}$$

Una caracterización geométrica para el crecimiento de α en (c, d) es, como acabamos de probar:

$$\alpha \text{ es estrictamente creciente en } (c, d) \Leftrightarrow \forall t, s \in (c, d), t < s, \\ \text{la cuerda que pasa por } \alpha(t) \text{ y } \alpha(s) \text{ tiene pendiente positiva}$$

De manera totalmente análoga, ocurre lo siguiente. Si:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) \end{aligned}$$

es una curva regular plana, estrictamente decreciente en $(c, d) \subseteq (a, b)$, entonces:

$$\forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0 \Rightarrow$$

$$\forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \forall t, s \in (c, d), \quad t < s$, la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ es negativa.

Y recíprocamente, si: $\forall t, s \in (c, d), \quad t < s$, la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ es negativa, tendremos:

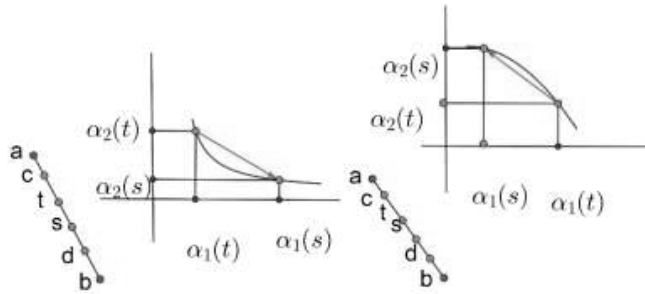
$$\forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} < 0 \Rightarrow$$

$$\forall t, s \in (c, d), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0$$

Y por tanto α es estrictamente decreciente en (c, d) .

Así pues, también:

α es estrictamente decreciente en $(c, d) \leftrightarrow \forall t, s \in (c, d),$
 $t < s$, la cuerda que pasa por $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ tiene pendiente negativa



Podemos resumir lo expuesto en la observación en el siguiente resultado:

Teorema 3.5 Sea α una curva regular plana.

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Sea $(c, d) \subseteq (a, b)$. Entonces:

1. α es estrictamente creciente en $(c, d) \leftrightarrow \forall t, s \in (c, d), \quad t < s$,
la pendiente de la cuerda que pasa por $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ es estrictamente positiva
2. α es estrictamente decreciente en $(c, d) \leftrightarrow \forall t, s \in (c, d), \quad t < s$,
la pendiente de la cuerda que pasa por $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$ es estrictamente negativa

#

Es en este contexto de curvas regulares planas, donde el Teorema del Valor Medio de Cauchy nos muestra su verdadera interpretación geométrica.

Para seguir, vamos a intentar comprender esta interpretación y vamos a ayudarnos de ella, de manera análoga a como lo hacíamos con el Teorema del Valor Medio de Lagrange para funciones, para conocer alguna condición suficiente para que una curva regular plana sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Tomemos una curva regular plana α

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Tomemos $t, s \in (a, b)$, $t < s$ y supongamos que: $\alpha_1(t) \neq \alpha_1(s)$

Si consideramos entonces las funciones:

$$\alpha_1: [t, s] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y \quad \alpha_2: [t, s] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha_1(t) \quad t \rightarrow \alpha_2(t)$$

Tendremos: α_1 y α_2 son funciones continuas en $[t, s]$

α_1 y α_2 son funciones diferenciables en (t, s)

En virtud del Teorema del Valor Medio de Cauchy tendremos entonces que:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) \alpha'_1(t_0) = (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) \alpha'_2(t_0)$$

i.e:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} \alpha'_1(t_0) = \alpha'_2(t_0)$$

Además en estas condiciones, tiene que ocurrir necesariamente que $\alpha'_1(t_0) \neq 0$, pues si fuera:

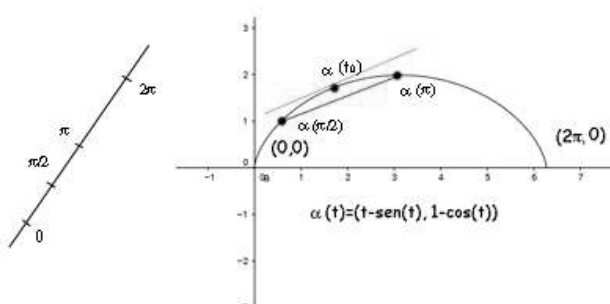
$\alpha'_1(t_0) = 0$, también sería, en virtud de la igualdad anterior: $\alpha'_2(t_0) = 0 \Rightarrow$

$(\alpha'_1(t_0), \alpha'_2(t_0)) = (0, 0)$, y por tanto α no sería una curva regular plana.

Luego, para nuestro t_0 ocurre: $\alpha'_1(t_0) \neq 0$, y podemos escribir:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} = \frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)}$$

i.e: hay un punto $\alpha(t_0)$ en la curva, con $t_0 \in (t, s)$ donde la recta tangente a la curva en este punto $\alpha(t_0)$ es paralela a la cuerda que pasa por $\alpha(t)$ y $\alpha(s)$



A la vista de esta interpretación geométrica, podemos enunciar el siguiente resultado, si queremos, incluso a modo de consecuencia, como hicimos con el Teorema del Valor Medio de Lagrange:

Teorema 3.6 Sea α una curva regular plana.

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Entonces:

1. Si $\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} > 0$, $\forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha$ es estrictamente creciente en (a, b)
2. Si $\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} < 0$, $\forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha$ es estrictamente decreciente en (a, b)
3. Si $\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} = 0$, $\forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_2$ es una función constante en (a, b)

Demostración:

Tomemos una curva regular plana:

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

1. Y supongamos que ocurre que:

$$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} > 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

En principio de este hecho se desprende lo siguiente:

$\alpha'_2(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$
 $\alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$ $\Rightarrow$ como además: $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(a, b)$ por ser α una curva regular plana, tendremos:

Y $\begin{matrix} \text{o bien: } \alpha'_2(t) > 0, & \forall t \in (a, b) & \text{o bien: } \alpha'_2(t) < 0, & \forall t \in (a, b) \\ \text{o bien: } \alpha'_1(t) > 0, & \forall t \in (a, b) & \text{o bien: } \alpha'_1(t) < 0, & \forall t \in (a, b) \end{matrix}$

En virtud de una consecuencia del Teorema del Valor Medio (TVM) de Lagrange:

α_2 es estrictamente creciente en (a, b) ó α_2 es estrictamente decreciente en (a, b) .

Y α_1 es estrictamente creciente en (a, b) ó α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) .

En cualquier caso:

α_2 es una función inyectiva en (a, b)

Y α_1 es una función inyectiva en (a, b) .

Conocido este hecho, vamos a considerar $t, s \in (a, b)$, $t < s$ arbitrarios. Ocurre entonces lo siguiente:

α_1 y α_2 son funciones continuas en $[t, s]$

α_1 y α_2 son funciones diferenciables en (t, s)

En virtud entonces del TVM de Cauchy, tendremos que:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) \alpha'_1(t_0) = (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) \alpha'_2(t_0)$$

Pero además, por todo lo anterior:

$$(\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) \neq 0, \quad (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) \neq 0, \quad \alpha'_1(t_0) \neq 0, \quad \alpha'_2(t_0) \neq 0$$

Entonces tendremos:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} = \frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)}$$

Y según nuestra hipótesis:

$$\frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)} > 0$$

Entonces:

$$\frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} > 0 \Rightarrow (\alpha_2(s) - \alpha_2(t))(\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

i.e.,

$$\forall t, s \in (a, b), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t))(\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) > 0$$

Y en consecuencia: α es una curva estrictamente creciente en (a, b)

2. Si suponemos ahora que:

$$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} < 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

Vuelve a ocurrir, que:

$$\alpha'_2(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b) \text{ y } \alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

Y por las mismas razones anteriores serán α_1 y α_2 funciones inyectivas en (a, b) .

Si tomamos ahora: $t, s \in (a, b)$, $t < s$ arbitrarios, tendremos:

α_1 y α_2 son funciones continuas en $[t, s]$

α_1 y α_2 son funciones diferenciables en (t, s)

Por el TVM de Cauchy ocurre entonces:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) \alpha'_1(t_0) = (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) \alpha'_2(t_0)$$

Y como:

$$(\alpha_2(s) - \alpha_2(t)) \neq 0, \quad (\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) \neq 0, \quad \alpha'_1(t_0) \neq 0, \quad \alpha'_2(t_0) \neq 0$$

Tendremos:

$$\exists t_0 \in (t, s), \quad \frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} = \frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)}$$

Como además, ahora:

$$\frac{\alpha'_2(t_0)}{\alpha'_1(t_0)} < 0$$

Entonces:

$$\frac{(\alpha_2(s) - \alpha_2(t))}{(\alpha_1(s) - \alpha_1(t))} < 0 \Rightarrow (\alpha_2(s) - \alpha_2(t))(\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0$$

i.e.,

$$\forall t, s \in (a, b), \quad t < s, \quad (\alpha_2(s) - \alpha_2(t))(\alpha_1(s) - \alpha_1(t)) < 0$$

Y por tanto: α es una curva estrictamente decreciente en (a, b)

3. Si suponemos por último que:

$$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} = 0, \quad \forall t \in (a, b)$$

Ocurrirá obligatoriamente que $\alpha'_2(t) = 0$, $\forall t \in (a, b)$, y en este caso, por una consecuencia del TVM de Lagrange, tendremos que α_2 es una función constante en (a, b) .

c.s.q.d.

Si este resultado anterior, lo hubiéramos enunciado en términos del producto de $\alpha'_2(t)$ y $\alpha'_1(t)$, en lugar de en términos del cociente, podríamos aspirar a un resultado casi recíproco para los dos apartados primeros.

Este resultado al que nos referimos, sería el siguiente:

Teorema 3.7 Sea una curva regular plana α

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Entonces:

1. Si α es estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow \forall t_0 \in (a, b), \quad \alpha'_2(t_0) \alpha'_1(t_0) \geq 0$
2. Si α es estrictamente decreciente en $(a, b) \Rightarrow \forall t_0 \in (a, b), \quad \alpha'_2(t_0) \alpha'_1(t_0) \leq 0$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

1. Y supongamos que α es estrictamente creciente en (a, b) . Fijemos un $t_0 \in (a, b)$, arbitrario. Ocurre entonces lo siguiente por ser α estrictamente creciente en (a, b) .

$$\forall t \in (a, b), \quad t_0 < t, \quad (\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t \in (a, b), \quad t_0 < t, \quad \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} > 0$$

Además: α_2 y α_1 son diferenciables en t_0 , entonces:

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \quad y \quad \exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0}$$

Tenemos así, que:

$$\forall t \in (a, b), \quad t_0 < t, \quad \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} > 0$$

$$Y \quad \exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)}{t - t_0} \right)$$

Entonces:

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)}{t - t_0} \right) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \right) \lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)}{t - t_0} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \right) \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)}{t - t_0} \right)$$

$$= \lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \right) \lim_{t \rightarrow t_0^+} \left(\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)}{t - t_0} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0)}{t - t_0} \right) \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)}{t - t_0} \right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \alpha'_2(t_0) \alpha'_1(t_0) \geq 0$$

Así pues:

Si α es una curva estrictamente creciente en (a, b) , entonces:

$$\forall t_0 \in (a, b), \quad \alpha'_2(t_0) \alpha'_1(t_0) \geq 0$$

2. Supongamos ahora que α es una curva estrictamente decreciente en (a, b) .

Tomemos $t_0 \in (a, b)$ cualquiera. Ocurre ahora:

$$\forall t \in (a, b), \quad t_0 < t, \quad (\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0)) < 0 \Rightarrow$$

$$\forall t \in (a, b), \quad t_0 < t, \quad \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} < 0$$

De otro lado, tanto α_2 como α_1 son funciones diferenciables en t_0 , entonces:

$$\exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \quad y \quad \exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0}$$

Tenemos pues:

$$\begin{aligned} \forall t \in (a, b), \quad t_0 < t, \quad \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} < 0 \\ y \quad \exists \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} \end{aligned}$$

Entonces, obligatoriamente, en virtud de un resultado sobre conservación del signo de los límites:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} & \\ = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\alpha_2(t) - \alpha_2(t_0))}{t - t_0} \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{(\alpha_1(t) - \alpha_1(t_0))}{t - t_0} &\leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha'_2(t_0) \alpha'_1(t_0) &\leq 0 \end{aligned}$$

Por tanto:

Si α es una curva estrictamente decreciente en $(a, b) \Rightarrow \forall t_0 \in (a, b)$,

$$\alpha'_2(t_0) \alpha'_1(t_0) \leq 0$$

c.s.q.d.

3.2 Extremos relativos de una curva

Habiendo hablado de crecimiento de una curva y una vez visto como el cálculo diferencial nos ayuda a detectar si una curva regular plana es estrictamente creciente ó estrictamente decreciente, vamos a intentar ver de forma somera, qué interpretación podemos dar en una curva a los extremos de las funciones.

Intentaremos de nuevo, generalizar el concepto de extremos conocido para funciones reales de variable real.

Una definición que parece servir para tal generalización de manera consistente es la siguiente:

Definición 3.8 Sea α una curva regular plana:

$$\begin{aligned} \alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

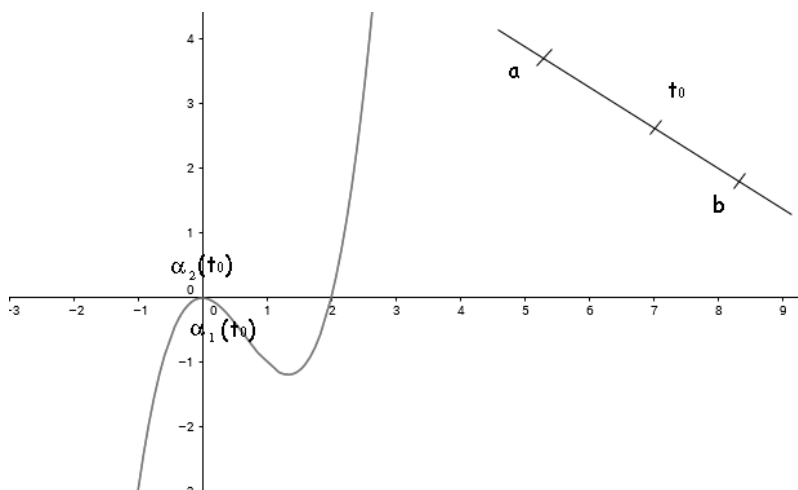
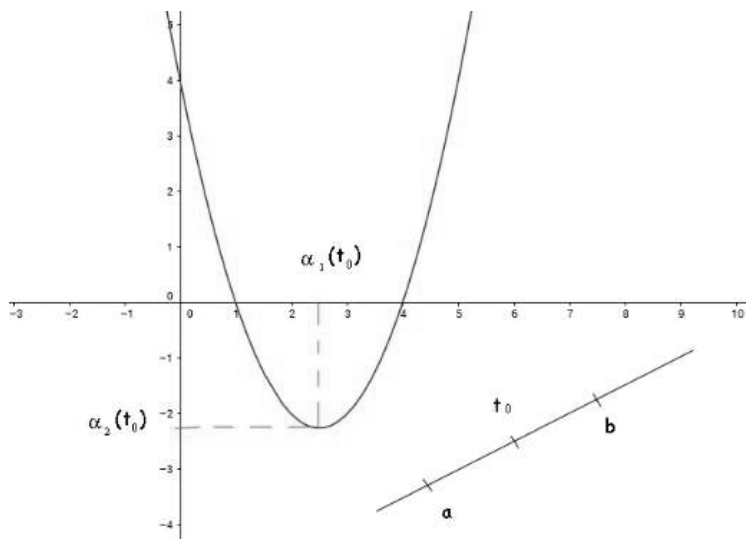
Decimos que la curva α **alcanza un mínimo relativo en $t_0 \in (a, b)$** si la función α_2 alcanza un mínimo relativo en $t_0 \in (a, b)$, i.e, si:

$$\exists \delta > 0 / \forall t \in (a, b) \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_0)$$

Decimos que la curva α **alcanza un máximo relativo en $t_0 \in (a, b)$** si la función α_2 alcanza un máximo relativo en $t_0 \in (a, b)$, i.e, si:

$$\exists \delta > 0 / \forall t \in (a, b) \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \leq \alpha_2(t_0)$$

Decimos que la curva α alcanza un extremo relativo en $t_0 \in (a, b)$, si alcanza un máximo relativo o un mínimo relativo en $t_0 \in (a, b)$



Antes de seguir, conviene ver si se trata de una definición consistente, o no.

Teorema 3.9 Sea:

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Una curva regular plana cuya traza sea grafo de una función f de clase 1. Sea $t_0 \in (a, b)$.

Entonces:

1. α alcanza en t_0 un máximo relativo $\leftrightarrow f$ alcanza en $\alpha_1(t_0)$ un máximo relativo.
2. α alcanza en t_0 un mínimo relativo $\leftrightarrow f$ alcanza en $\alpha_1(t_0)$ un mínimo relativo.

Demostración:

Tomemos α una curva regular plana cuya traza sea grafo de una función f de clase 1.

$$\begin{aligned}\alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

Sabemos que en esta situación ocurre que: $\alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$ y que tal función f no es otra que la que queda definida en la forma:

$$\begin{aligned}f: \alpha_1(a, b) &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow f(x) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)\end{aligned}$$

Tomemos ahora $t_0 \in (a, b)$

1. $\rightarrow$ Y supongamos que α alcanza un máximo relativo en t_0 . Entonces:

$$\exists \delta > 0 / \forall t \in (a, b) \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \leq \alpha_2(t_0)$$

Podemos suponer además, que tal $\delta > 0$, cumple:

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq (a, b)$$

i.e.,

$$\exists \delta > 0 / [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq (a, b), \quad y \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \leq \alpha_2(t_0)$$

Consideremos entonces el conjunto: $\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

Ocurre en principio lo siguiente:

$$\begin{aligned}\left. \begin{aligned} \alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_1 \in C^1(a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \left. \begin{aligned} \alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \\ \text{ó } \alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ &\left. \begin{aligned} \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \text{ó } \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{aligned} \right\}\end{aligned}$$

- Si α_1 es estrictamente creciente en (a, b) y $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, entonces
 $\alpha_1(t_0 - \delta) < \alpha_1(t) < \alpha_1(t_0 + \delta) \Rightarrow$
 $\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\} < \alpha_1(t) < \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\} \Rightarrow$
 $\alpha_1(t) \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$
 i.e.,
 $\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$
- Y si α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) y $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ entonces
 $\alpha_1(t_0 + \delta) < \alpha_1(t) < \alpha_1(t_0 - \delta) \Rightarrow$
 $\alpha_1(t) \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$
 i.e.,
 $\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$

Como vemos, en cualquier caso:

$$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

Y de otro lado, siendo α_1 continua en $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$ y estrictamente creciente ó decreciente (en cualquier caso inyectiva), tendremos:

$$\begin{aligned}\text{Si } x &\in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x \in [\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}] \Rightarrow\end{aligned}$$

en virtud de la propiedad de los valores intermedios:

$$\exists t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad \alpha_1(t) = x$$

Además, por el crecimiento de α_1 , se tiene: $t \neq t_0 - \delta$ y $t \neq t_0 + \delta$.

Entonces: $\exists t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_1(t) = x$. Y por tanto:

$$x \in \alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Luego también:

$$(\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}) \subseteq \alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Y de las dos inclusiones, tendremos:

$$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) = (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

i.e., $\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ es un entorno abierto del punto $\alpha_1(t_0)$

Y ahora, si tomamos $x \in \alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(x) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow$
según nuestra hipótesis:

$$\begin{aligned} \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) &\leq \alpha_2(t_0) \Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) \leq (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t_0)) \Rightarrow \\ &\Rightarrow f(x) \leq f(\alpha_1(t_0)) \end{aligned}$$

Existe por tanto $(\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$ un entorno abierto del punto $\alpha_1(t_0)$ tal que:

$$\forall x \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}), \quad f(x) \leq f(\alpha_1(t_0))$$

Y en consecuencia f alcanza un máximo relativo en $\alpha_1(t_0)$

←) Recíprocamente, supongamos ahora que f alcanza un máximo relativo en $\alpha_1(t_0)$.

Tendremos entonces, que:

$$\exists \rho > 0 / \forall x \in (\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) \cap \alpha_1(a, b), \quad f(x) \leq f(\alpha_1(t_0))$$

Podemos suponer además que $\rho > 0$ es tal que:

$$[\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho] \subseteq \alpha_1(a, b)$$

i.e., podemos suponer que:

$$\begin{aligned} \exists \rho > 0 / [\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho] &\subseteq \alpha_1(a, b) \text{ y} \\ \forall x \in (\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho), \quad f(x) &\leq f(\alpha_1(t_0)) \end{aligned}$$

Bien, pues si consideramos el conjunto:

$$\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$$

Siendo α_1 una función continua en t_0 , no cabe ninguna duda, que por definición ha de ser $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$ un entorno abierto del punto t_0 . Entonces existirá:

$$\delta > 0 / t_0 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$$

Bien, pues si tomamos entonces: $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ tendremos:

$$\begin{aligned} t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) &\Rightarrow t \in \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1(t) \in (\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) &\Rightarrow f(\alpha_1(t)) \leq f(\alpha_1(t_0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t)) \leq (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t_0)) &\Rightarrow \alpha_2(t) \leq \alpha_2(t_0) \end{aligned}$$

i.e.,

$$\exists \delta > 0 / \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \leq \alpha_2(t_0)$$

Y en consecuencia α alcanza un máximo relativo en t_0 .

2.→) Supongamos ahora que α alcanza un mínimo relativo en $t_0 \Rightarrow \alpha_2$ alcanza un mínimo relativo en $t_0 \Rightarrow \exists \delta > 0$, que podemos tomar además de manera que:

$$[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq (a, b) \text{ y tal que: } \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_0)$$

Vamos a considerar entonces el conjunto: $\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$

De un lado tendremos, en virtud de la propiedad de los valores intermedios, para:

$$\begin{aligned} \alpha_1: [t_0 - \delta, t_0 + \delta] &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha_1(t) \end{aligned}$$

que:

$$\begin{aligned} \forall x \in [\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}], \\ \exists t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad \alpha_1(t) = x \end{aligned}$$

En particular:

$$\begin{aligned} \text{si } x \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}), \\ \exists t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta], \quad \alpha_1(t) = x \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \text{si } t = t_0 - \delta &\Rightarrow x = \alpha_1(t_0 - \delta) \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \alpha_1(t_0 - \delta) &\notin (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}) \end{aligned}$$

Luego: $t \neq t_0 - \delta$.

Y por análogas razones: $t \neq t_0 + \delta$

Luego tenemos:

$$\begin{aligned} \forall x \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}), \\ \exists t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_1(t) = x \end{aligned}$$

Entonces:

$$(\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}) \subseteq \alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$$

Y de otro lado, recordemos que: $\alpha_1 \in C^1(a, b)$ y $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$

Entonces, ó bien: $\alpha'_1(t) > 0$, $\forall t \in (a, b)$ ó bien: $\alpha'_1(t) < 0$, $\forall t \in (a, b)$

Si fuera $\alpha'_1(t) > 0$, $\forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente creciente en (a, b)

Entonces: $\forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$, $\alpha_1(t_0 - \delta) < \alpha_1(t) < \alpha_1(t_0 + \delta) \Rightarrow$

$$\alpha_1(t) \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

i.e.,

$$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

Y si fuera $\alpha'_1(t) < 0$, $\forall t \in (a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es estrictamente decreciente en (a, b)

Entonces:

$$\begin{aligned} \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_1(t_0 + \delta) < \alpha_1(t) < \alpha_1(t_0 - \delta) \Rightarrow \\ \alpha_1(t) \in (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}) \end{aligned}$$

i.e:

$$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

En cualquier caso como vemos:

$$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

Y de las dos inclusiones, tenemos:

$$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) = (\min\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\}, \max\{\alpha_1(t_0 - \delta), \alpha_1(t_0 + \delta)\})$$

i.e., $\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ es un entorno abierto de $\alpha_1(t_0)$

Y si tomamos: $x \in \alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(x) \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) \geq \alpha_2(t_0) \Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) \geq (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t_0)) \Rightarrow \\ \Rightarrow f(x) \geq f(\alpha_1(t_0)) \end{aligned}$$

Luego:

$\alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ es un entorno abierto de $\alpha_1(t_0)$, y:

$$\forall x \in \alpha_1(t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad f(x) \geq f(\alpha_1(t_0))$$

Y por tanto f alcanza un mínimo relativo en el punto: $\alpha_1(t_0)$

←) Recíprocamente, supongamos por último que f alcanza un mínimo relativo en $\alpha_1(t_0) \Rightarrow$

$\exists \rho > 0$, podemos suponerlo tal que:

$(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) \subseteq \alpha_1(a, b)$ de manera que:

$$\forall x \in (\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho), \quad f(x) \geq f(\alpha_1(t_0))$$

Bien, pues vamos a considerar: $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$

Ocurre en principio que por ser α_1 una función continua y

$(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$ un conjunto abierto, será:

$\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$ un conjunto abierto en la topología relativa de (a, b) , i.e., $\exists G$ un abierto en $\mathbb{R}$, $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) = G \cap (a, b)$

Entonces: $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$ es un abierto en $\mathbb{R}$. Y desde luego:

$$\alpha_1(t_0) \in (\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) \Rightarrow t_0 \in \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$$

i.e.: $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$ es un entorno abierto de t_0 .

Y si tomamos $t \in \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) \Rightarrow \alpha_1(t) \in (\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$

Entonces, como f alcanza un mínimo relativo en $\alpha_1(t_0)$, $f(\alpha_1(t)) \geq f(\alpha_1(t_0))$

$$\Rightarrow (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t)) \geq (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(\alpha_1(t_0)) \Rightarrow \alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_0)$$

Así pues, existe un entorno abierto (en $\mathbb{R}$) de t_0 , $\alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$

tal que: $\forall t \in \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$, $\alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_0)$.

Por último, y conocido el hecho de que la familia: $\{(t_0 - \delta, t_0 + \delta)\}_{\delta > 0}$ constituye una base de entornos abiertos del punto t_0 , ocurrirá sin duda que:

$$\exists \delta > 0, \quad t_0 \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subseteq \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho)$$

Y desde luego:

$$\text{si } t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow t \in \alpha_1^{-1}(\alpha_1(t_0) - \rho, \alpha_1(t_0) + \rho) \Rightarrow \alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_0)$$

i.e.:

$$\exists \delta > 0 / \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \alpha_2(t) \geq \alpha_2(t_0)$$

Y por tanto α alcanza en t_0 un mínimo relativo.

c.s.q.d.

Comprobada la consistencia de nuestra definición, observemos ahora que en el fondo, quedan definidos los conceptos de extremos relativos para una curva, en función de los extremos relativos para una función real de variable real. Toman de esta forma vigencia para curvas, los resultados que conocemos relativos a extremos de funciones. Quizás los que más interesen sean los dos que enunciamos a continuación.

Teorema 3.10 Sea α una curva regular plana

$$\alpha: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$t_0 \in (a, b)$. Entonces:

$$\text{Si } \alpha \text{ alcanza en } t_0 \text{ un extremo relativo} \Rightarrow \alpha'_2(t_0) = 0$$

Demostración:

Tomemos una curva regular plana

$$\alpha: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$t_0 \in (a, b)$. Y supongamos que α alcanza un extremo relativo en t_0 .

Tendremos entonces que α_2 alcanza un extremo relativo en t_0 , i.e., tendremos:

$$\alpha_2: (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

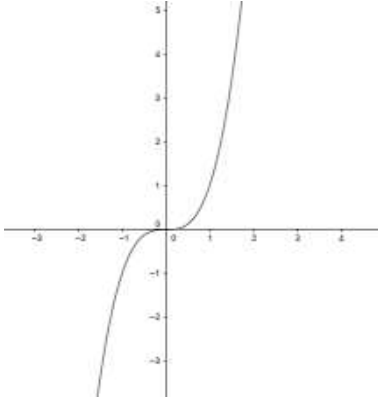
$$t \rightarrow \alpha_2(t)$$

$t_0 \in (a, b)$, α_2 es diferenciable en t_0 y α_2 alcanza un extremo relativo en t_0 . En virtud entonces de la condición necesaria para la existencia de extremo relativo, tendremos que ha de ocurrir, que: $\alpha'_2(t_0) = 0$.

Así pues:

$$\text{Si } \alpha \text{ alcanza un extremo relativo en } t_0 \in (a, b) \Rightarrow \alpha'_2(t) = 0$$

c.s.q.d.



Tenemos así una condición necesaria para la existencia de extremos relativos para curvas. Condición que vuelve a ser **no suficiente**. Nos puede servir para probarlo, la curva:

$$\begin{aligned}\alpha: (-2, 2) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (t, t^3)\end{aligned}$$

Para la cual: $\alpha'_2(0) = 0$ y sin embargo no alcanza ningún extremo relativo en $t_0 = 0$

Teorema 3.11 Sea α una curva regular plana.

$$\begin{aligned}\alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

$t_0 \in (a, b)$, y supongamos que α_2 es dos veces diferenciable en t_0 .

Entonces:

1. Si $\alpha'_2(t_0) = 0$ y $\alpha''_2(t_0) > 0 \Rightarrow \alpha$ alcanza un mínimo relativo en t_0
2. Si $\alpha'_2(t_0) = 0$ y $\alpha''_2(t_0) < 0 \Rightarrow \alpha$ alcanza un máximo relativo en t_0

Demostración:

Tomemos una curva regular plana α

$$\begin{aligned}\alpha: (a, b) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

$t_0 \in (a, b)$, y supongamos que α_2 es dos veces diferenciable en el punto t_0

1. Supongamos que ocurre además, que: $\alpha'_2(t_0) = 0$ y que: $\alpha''_2(t_0) > 0$.

Si tomamos entonces: $\delta = \min\{t_0 - a, b - t_0\} > 0$, tendremos que la función:

$$\begin{aligned}\alpha_2: \left[t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha_2(t)\end{aligned}$$

es una función continua en $\left[t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right]$, derivable en $\left(t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right)$, dos veces derivable en t_0 , y además: $\alpha'_2(t_0) = 0$ y $\alpha''_2(t_0) > 0$. En virtud entonces de un resultado conocido sobre extremos de funciones, ocurre que la función α_2 alcanza un mínimo relativo en t_0 . En consecuencia la curva α alcanza un mínimo relativo en t_0 .

2. De manera análoga, si: $\alpha'_2(t_0) = 0$ y $\alpha''_2(t_0) < 0$ y volvemos a tomar:

$\delta = \min\{t_0 - a, b - t_0\} > 0$ tendremos:

$$\begin{aligned}\alpha_2: \left[t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \alpha_2(t)\end{aligned}$$

es una función continua en $\left[t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right]$, derivable en $\left(t_0 - \frac{\delta}{2}, t_0 + \frac{\delta}{2}\right)$, dos veces derivable en el punto t_0 , y además: $\alpha'_2(t_0) = 0$ y $\alpha''_2(t_0) < 0$

Nuevamente, en virtud del resultado mencionado: α_2 alcanzará un máximo relativo. Entonces la curva α alcanza en t_0 un máximo relativo.

c.s.q.d.

3.3 Concavidad o convexidad de una curva

Vamos a seguir ahora, haciendo un breve comentario sobre convexidad y concavidad para las curvas regulares planas.

Definición 3.12 Sea una curva regular plana

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

tal que α_1 es inyectiva en $(a, b) \subseteq (A, B)$.

Decimos que α es **convexa** en (a, b) si ocurre:

$$\forall c, d \in (a, b), \quad c < d, \quad \forall t \in (c, d),$$

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Decimos que α es **cóncava** en (a, b) si ocurre:

$$\forall c, d \in (a, b), \quad c < d, \quad \forall t \in (c, d),$$

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Antes de seguir, vamos a intentar dar una interpretación geométrica a estas definiciones que acabamos de enunciar.

Interpretación geométrica:

Tomemos una curva regular plana:

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

tal que α_1 sea inyectiva en $(a, b) \subseteq (A, B)$.

Tomemos: $c, d \in (a, b)$, $c < d$ y tomemos $t \in (c, d)$.

Si consideramos entonces la función:

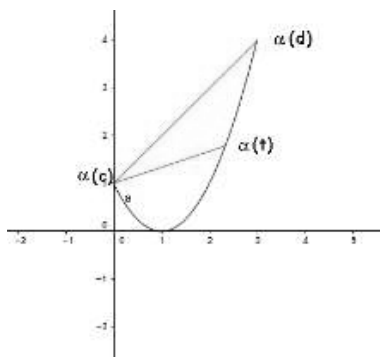
$$\alpha_1: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha_1(t)$$

Nos encontramos con que α_1 es una función continua en $[c, d]$ e inyectiva en $[c, d]$. En virtud de un resultado que se puede encontrar en cualquier texto de Análisis Matemático I, podemos asegurar que es α_1 una función estrictamente monótona.

Si fuera α_1 estrictamente creciente, la definición de convexidad quedaría:

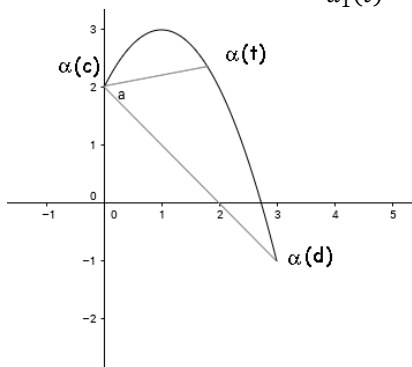
$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$



i.e: la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, es más pequeña que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$

Y la definición de concavidad quedaría:

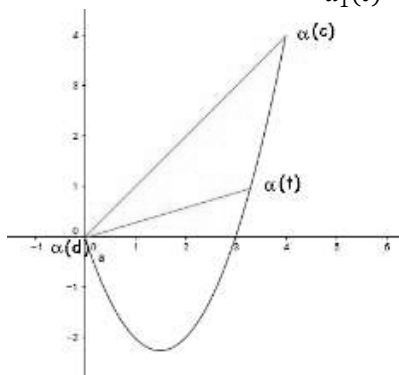
$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$



i.e: la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ es mayor que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$

Y si fuera α_1 estrictamente decreciente en $[c, d]$, la condición de convexidad quedaría:

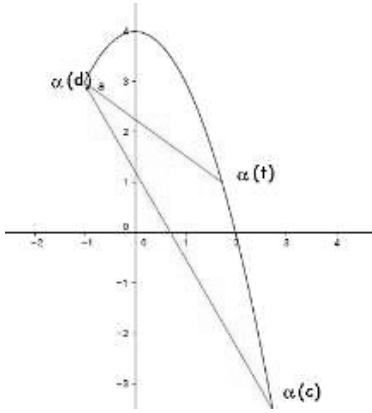
$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$



i.e: ahora la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos: $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$ es más pequeña que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos: $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$

Mientras que la condición de concavidad quedaría:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$



que asegura que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos: $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$ es mayor que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos: $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$

Como vemos en cualquier caso la condición de convexidad exige que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos: $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$ sea mayor que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ y

$$\left(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}, \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})) \right), \quad \forall t \in (c, d).$$

Y la condición de concavidad exige que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos $(\alpha_1(c), \alpha_2(c))$ y $(\alpha_1(d), \alpha_2(d))$ sea menor que la pendiente de la cuerda que pasa por los puntos:

$$(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \text{ y } \left(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}, \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})) \right), \quad \forall t \in (c, d)$$

Siguiendo como hasta ahora, vamos a intentar ver que la definición de concavidad y convexidad para curvas planas, es consistente con la conocida para funciones:

Teorema 3.13 Sea una curva regular plana

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

cuya traza es grafo de una función f de clase 1. Entonces:

1. α es convexa en $(a, b) \subseteq (A, B) \leftrightarrow f$ es convexa en $\alpha_1(a, b)$
2. α es cóncava en $(a, b) \subseteq (A, B) \leftrightarrow f$ es cóncava en $\alpha_1(a, b)$

Demostración:

Tomemos:

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

una curva regular plana cuya traza es grafo de una función f de clase 1. Sabemos de resultados anteriores que en estas condiciones:

$\alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (A, B)$, y que tal función f de clase 1, no es otra que la función:

$$f: \alpha_1(A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x)$$

Además, siendo $\alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (A, B)$, ocurre que α_1 es una función inyectiva en (A, B) , y tiene por tanto sentido hablar de concavidad ó convexidad para α .

1.→ Supongamos que α es una curva convexa en $(a, b) \subseteq (A, B)$ y vamos a tomar

$$x, y \in \alpha_1(a, b), \quad x < y, \quad \lambda \in (x, y)$$

Sin duda: $\exists c \in (a, b)$, $\alpha_1(c) = x$, $\exists d \in (a, b)$, $\alpha_1(d) = y$.

Como además: α_1 es continua en (a, b) , entonces α_1 será continua en el intervalo:

$[\min\{c, d\}, \max\{c, d\}]$. Y como:

$\lambda \in [\min\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}, \max\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}] = [x, y]$.

Tendremos por la propiedad de los valores intermedios para α_1 , que:

$$\exists t \in (\min\{c, d\}, \max\{c, d\}), \quad \alpha_1(t) = \lambda$$

Tenemos pues: $c, d \in (a, b)$, $t \in (\min\{c, d\}, \max\{c, d\})$. Como por hipótesis, es α una curva convexa en (a, b) , ocurre entonces que:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}} < \frac{\alpha_2(\max\{c, d\}) - \alpha_2(\min\{c, d\})}{\alpha_1(\max\{c, d\}) - \alpha_1(\min\{c, d\})}$$

i.e:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{\alpha_1(t) - x} &< \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \Rightarrow \\ \frac{\alpha_2(\alpha_1^{-1}(\lambda)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{\lambda - x} &< \frac{\alpha_2(\alpha_1^{-1}(y)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{y - x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{f(\lambda) - f(x)}{\lambda - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \end{aligned}$$

Ocorre por tanto que:

$$\forall x, y \in (c, d), x < y, \forall \lambda \in (x, y), \quad \text{se tiene: } \frac{f(\lambda) - f(x)}{\lambda - x} < \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Y en consecuencia f es una función convexa en $\alpha_1(a, b)$ en virtud de una caracterización para funciones convexas que conocemos del estudio de funciones reales de variable real.

←) Recíprocamente, supongamos ahora que f es una función convexa en $\alpha_1(a, b)$. Y tomemos $c, d \in (a, b)$, $c < d$, $t \in (c, d)$. Tendremos entonces que:

$\alpha_1(c) \in \alpha_1(a, b)$, $\alpha_1(d) \in \alpha_1(a, b)$, y además, por ser α_1 una función estrictamente monótona (por ser $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (A, B)$ y de clase 1), también se tendrá que:

$$\alpha_1(t) \in (\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}, \max\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})$$

Bien, pues siendo f una función convexa en $\alpha_1(a, b)$, tendremos, en virtud de un resultado conocido:

$$\begin{aligned} \frac{f(\alpha_1(t)) - f(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} &< \frac{f(\max\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}) - f(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})}{\max\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\} - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} \\ &\Rightarrow \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \end{aligned}$$

i.e, tenemos que: $\forall c, d \in (a, b)$, $c < d$, $\forall t \in (c, d)$, se cumple:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y por tanto α es una curva convexa en (a, b)

2.→) Supongamos ahora que α es una curva cóncava en (a, b) . Y tomemos

$$x, y \in \alpha_1(a, b), \quad x < y, \quad \lambda \in (x, y)$$

Ocorre, en principio:

$$\begin{aligned} x \in \alpha_1(a, b) &\Rightarrow \exists c \in (a, b), & \alpha_1(c) &= x \\ y \in \alpha_1(a, b) &\Rightarrow \exists d \in (a, b), & \alpha_1(d) &= y \end{aligned}$$

Y si consideramos:

$$\alpha_1: [\min\{c, d\}, \max\{c, d\}] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha_1(t)$$

Tendremos:

α_1 es una función continua en $[\min\{c, d\}, \max\{c, d\}]$

$\lambda \in (x, y) \subseteq [x, y]$

$$= [\min\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}, \max\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}]$$

En virtud entonces del resultado de los valores intermedios:

$$\exists t \in [\min\{c, d\}, \max\{c, d\}], \quad \alpha_1(t) = \lambda$$

Y además: $t \neq c$ y $t \neq d$

i.e.,

$$\exists t \in (\min\{c, d\}, \max\{c, d\}), \quad \alpha_1(t) = \lambda$$

Tenemos pues:

$$c, d \in (a, b), \quad \min\{c, d\} < \max\{c, d\}, \quad t \in (\min\{c, d\}, \max\{c, d\})$$

Y como α es cóncava en (a, b)

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(\min\{c, d\}), \alpha_1(\max\{c, d\})\}} > \frac{\alpha_2(\max\{c, d\}) - \alpha_2(\min\{c, d\})}{\alpha_1(\max\{c, d\}) - \alpha_1(\min\{c, d\})}$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{\alpha_1(t) - x} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2(\alpha_1^{-1}(\lambda)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{\lambda - x} > \frac{\alpha_2(\alpha_1^{-1}(y)) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{y - x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(\lambda) - f(x)}{\lambda - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

i.e.,

$$\forall x, y \in \alpha_1(a, b), \quad x < y, \quad \forall \lambda \in (x, y),$$

$$\frac{f(\lambda) - f(x)}{\lambda - x} > \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Y por tanto en virtud de un resultado que podemos encontrar en textos de Análisis Matemático, es f una función cóncava en el intervalo $\alpha_1(a, b)$

←) Recíprocamente, supongamos ahora que la función f es cóncava en $\alpha_1(a, b)$, y tomemos $c, d \in (a, b)$, $c < d$ y $t \in (c, d)$.

Tendremos:

$$\alpha_1(c) \in \alpha_1(a, b)$$

$$\alpha_1(d) \in \alpha_1(a, b)$$

Y como α_1 es estrictamente monótona en (a, b) , también:

$$\alpha_1(t) \in (\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}, \max\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})$$

Como además, f es una función cóncava, por hipótesis, tenemos:

$$\frac{f(\alpha_1(t)) - f(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{f(\max\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}) - f(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})}{\max\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\} - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}}$$

$$\Rightarrow \frac{f(\alpha_1(t)) - f(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\})}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{f(\alpha_1(d)) - f(\alpha_1(c))}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

i.e., $\forall c, d \in (a, b)$, $c < d$ y $\forall t \in (c, d)$ se cumple:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y por tanto es α una curva cóncava en (a, b)

c.s.q.d.

Vemos de esta forma, como las definiciones de concavidad y convexidad para curvas regulares planas α , generalizan realmente, al menos cuando α_1 es una función inyectiva, los conceptos de concavidad y convexidad para funciones (para grafos de funciones).

Ocurre también para una curva α , que determinadas situaciones de concavidad o convexidad combinadas con situaciones de crecimiento o decrecimiento de las funciones α_1 y α_2 , pueden determinar condiciones suficientes para conocer si la curva α es cóncava o convexa. Exponemos ahora algunos resultados que nos muestran estos hechos. Sus pruebas son muy similares, por lo que sólo vamos a demostrar algunos de los que enunciaremos. Las demostraciones de los demás pueden ser un buen ejercicio para el lector.

Teorema 3.14 Sea una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

$(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

1. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b)$
2. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b)$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \\ (a, b) &\subseteq (A, B) \end{aligned}$$

1. Y supongamos que ocurre:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{array}$$

Siendo α_1 una función estrictamente creciente en (a, b) , no cabe duda de que α_1 es inyectiva en (a, b) , y tiene por tanto sentido plantear si α puede ser convexa ó cóncava en el intervalo (a, b) .

Tomemos $c, d \in (a, b)$, $c < d$ y $t \in (c, d)$ cualquiera.

Como α_1 es convexa en (a, b) , entonces:

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{t - c} < \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c}$$

Como $t - c > 0$

$$\alpha_1(t) - \alpha_1(c) < \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c} (t - c)$$

Como $\alpha_1(d) - \alpha_1(c) > 0$, por ser α_1 estrictamente creciente en (a, b) , tendremos:

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} < \frac{t - c}{d - c}$$

Ahora, de otro lado para la función α_2 ocurre:

α_2 es convexa en (a, b) , entonces:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{t - c} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d - c}$$

Como $t - c > 0$, se tiene:

$$\alpha_2(t) - \alpha_2(c) < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d - c} (t - c)$$

Y como α_2 es estrictamente decreciente en (a, b) , $\alpha_2(d) - \alpha_2(c) < 0$. Por tanto:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} > \frac{t - c}{d - c}$$

Tenemos de esta manera, que si:

$c, d \in (a, b)$, $c < d$ y $t \in (c, d)$, entonces:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} > \frac{t - c}{d - c} > \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

i.e., $\forall c, d \in (a, b)$, $c < d$, $\forall t \in (c, d)$,

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} > \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Como α_1 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{(\alpha_2(d) - \alpha_2(c))(\alpha_1(t) - \alpha_1(c))} > \frac{1}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y como α_2 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Tenemos, en resumen: $\forall c, d \in (a, b)$, $c < d$, $\forall t \in (c, d)$,

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y por tanto es α una curva convexa en (a, b) .

2. Supongamos ahora que:

α_1 es convexa en (a, b)

α_2 es convexa en (a, b)

α_1 es estrictamente decreciente en (a, b)

α_2 es estrictamente creciente en (a, b)

Vuelve a ocurrir que α_1 es una función inyectiva en (a, b) , y si tomamos $c, d \in (a, b)$, $c < d$ y $t \in (c, d)$ cualquiera, se tiene:

De un lado: α_1 es convexa en (a, b) , entonces:

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{t - d} > \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c}$$

Como $t - d < 0$ entonces:

$$\alpha_1(t) - \alpha_1(d) < \frac{t-d}{d-c} (\alpha_1(d) - \alpha_1(c))$$

Y como α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} > \frac{t-d}{d-c}$$

De otro lado, como α_2 es convexa en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{t-d} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d-c}$$

Como $t-d < 0$, entonces:

$$\alpha_2(t) - \alpha_2(d) < \frac{t-d}{d-c} (\alpha_2(d) - \alpha_2(c))$$

Y como α_2 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} < \frac{t-d}{d-c}$$

Luego, encadenando las dos desigualdades, tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} &< \frac{t-d}{d-c} < \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \\ \Rightarrow \frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} &< \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \end{aligned}$$

Como α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{(\alpha_1(t) - \alpha_1(d))(\alpha_2(d) - \alpha_2(c))} < \frac{1}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y como α_2 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

i.e., $\forall c, d \in (a, b), c < d, \forall t \in (c, d),$

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Entonces: $\forall c, d \in (a, b), c < d, \forall t \in (c, d),$

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y por tanto es α una curva convexa en (a, b) .

c.s.q.d.

Teorema 3.15 Sea una curva regular plana

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

1. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b)$
2. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b)$

Demostración:

Tomemos una curva regular plana:

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$(a, b) \subseteq (A, B)$.

1. Y supongamos que ocurre:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{array} \right\}$$

Observemos en principio que si α_1 es una función estrictamente creciente en $(a, b) \Rightarrow \alpha_1$ es inyectiva en (a, b) .

Bien, pues tomemos ahora $c, d \in (a, b)$, $c < d$ y $t \in (c, d)$

Ocurre lo siguiente:

De un lado, como α_1 es convexa en (a, b) :

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{t - c} < \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c}$$

Como $t - c > 0$. Entonces:

$$\alpha_1(t) - \alpha_1(c) < \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c} (t - c)$$

Y como α_1 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} < \frac{t - c}{d - c}$$

De otro lado, como α_2 es cóncava en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{t - c} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d - c}$$

Como $t - c > 0$, entonces:

$$\alpha_2(t) - \alpha_2(c) > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d - c} (t - c)$$

Y como α_2 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} > \frac{t - c}{d - c}$$

i.e.,

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} > \frac{t - c}{d - c} > \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} > \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Como α_1 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{(\alpha_2(d) - \alpha_2(c))(\alpha_1(t) - \alpha_1(c))} > \frac{1}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y como α_2 es estrictamente creciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Luego: $\forall c, d \in (a, b), c < d$ y $\forall t \in (c, d)$ se cumple:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(c)} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Entonces: $\forall c, d \in (a, b), c < d$ y $\forall t \in (c, d)$ se cumple:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y por tanto es α una curva cóncava en (a, b) .

2. Supongamos ahora que:

$$\begin{aligned} \alpha_1 & \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2 & \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_1 & \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha_2 & \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{aligned}$$

Vuelve a ocurrir que α_1 es una función inyectiva en (a, b)

Y si tomamos $c, d \in (a, b), c < d$ y $t \in (c, d)$, tenemos:

Como α_1 es convexa en (a, b) :

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{t - d} > \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c}$$

Como $t - d < 0$, entonces:

$$\alpha_1(t) - \alpha_1(d) < \frac{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}{d - c} (t - d)$$

Y como α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} > \frac{t - d}{d - c}$$

De otro lado, como α_2 es cóncava en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{t - d} < \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d - c}$$

Como $t - d < 0$, entonces:

$$\alpha_2(t) - \alpha_2(d) > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{d - c} (t - d)$$

Y como α_2 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} < \frac{t - d}{d - c}$$

i.e.,

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} < \frac{t - d}{d - c} < \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)} \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)} < \frac{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Como α_1 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{(\alpha_2(d) - \alpha_2(c))(\alpha_1(t) - \alpha_1(d))} < \frac{1}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y como α_2 es estrictamente decreciente en (a, b) :

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Así pues: $\forall c, d \in (a, b), \quad c < d \quad \text{y} \quad \forall t \in (c, d)$ se cumple:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(d)}{\alpha_1(t) - \alpha_1(d)} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Entonces: $\forall c, d \in (a, b), \quad c < d \quad \text{y} \quad \forall t \in (c, d)$ se cumple:

$$\frac{\alpha_2(t) - \alpha_2(\alpha_1^{-1}(\min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}))}{\alpha_1(t) - \min\{\alpha_1(c), \alpha_1(d)\}} > \frac{\alpha_2(d) - \alpha_2(c)}{\alpha_1(d) - \alpha_1(c)}$$

Y en consecuencia, es α una curva cóncava en (a, b) .

c.s.q.d.

De manera análoga se probarían los dos siguientes resultados:

Teorema 3.16 Sea una curva regular plana:

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

1. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b)$
2. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b)$

#

Teorema 3.17 Sea una curva regular plana

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

$(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

1. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b)$
2. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b)$

#

Desde resultados de diferenciabilidad, conocemos además condiciones suficientes para la concavidad ó convexidad de una función real de variable real y también para su crecimiento ó decrecimiento. Podemos enunciar utilizándolas, los siguientes resultados, consecuencia de los anteriores:

Corolario 3.18 Sea una curva regular plana

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Y supongamos que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciables en $(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

1. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha''_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \forall t \in (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b)$
2. Si $\left. \begin{array}{l} \alpha''_1(t) > 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \forall t \in (a, b) \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b)$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$$

Y supongamos que tanto α_1 como α_2 son funciones dos veces diferenciables en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$.

1. Supongamos además que ocurre que:

$$\begin{array}{ll} \alpha''_1(t) > 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, & \forall t \in (a, b) \end{array}$$

Tendremos entonces, según las condiciones suficientes conocidas:

$$\begin{aligned} \alpha_1''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1'(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha_2'(t) &< 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{aligned}$$

Estamos de esta manera en las condiciones del resultado 3.14, y por tanto en virtud de su tesis, podemos asegurar que ocurre, que: la curva α es convexa en (a, b) .

2. Si suponemos ahora, que:

$$\begin{aligned} \alpha_1''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha_1'(t) &< 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2'(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \alpha_1''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_2''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha_1'(t) &< 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha_2'(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{aligned}$$

Y en virtud nuevamente del resultado 3.14, ahora en su segundo apartado, tendremos que α es una curva convexa en (a, b) .

c.s.q.d.

Corolario 3.19 Sea una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Y supongamos que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciables en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Si } &\left. \begin{aligned} \alpha_1''(t) &> 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2''(t) &< 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_1'(t) &> 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2'(t) &> 0, \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b) \\ 2. \text{ Si } &\left. \begin{aligned} \alpha_1''(t) &> 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2''(t) &< 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_1'(t) &< 0, \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2'(t) &< 0, \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b) \end{aligned}$$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Y supongamos que las funciones α_1 y α_2 son dos veces diferenciables en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$.

1. Supongamos que además ocurre:

$$\begin{aligned} \alpha_1''(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2''(t) &< 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha_1'(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) \\ \alpha_2'(t) &> 0, & \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Tendremos entonces:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{aligned}$$

Estamos, como vemos en las condiciones del resultado 3.15, y según su tesis, tendremos que α es cóncava en (a, b) .

2. Si suponemos ahora:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Ocurrirá:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{aligned}$$

En virtud nuevamente del resultado 3.15, ahora en su segundo apartado, tendremos que α es una curva cóncava en (a, b) .

c.s.q.d.

Corolario 3.20 Sea una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Y supongamos que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciables en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Si } \left. \begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b) \\ 2. \text{ Si } \left. \begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b) \end{aligned}$$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Y supongamos que α_1 y α_2 son dos funciones dos veces diferenciables en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$.

1. Supongamos que además ocurre que:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Tendremos entonces, que:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \end{aligned}$$

Y en virtud del resultado 3.16, podemos asegurar que ocurre que α es convexa en (a, b)

2. Si suponemos que ocurre:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha''_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es convexa en } (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \end{aligned}$$

Y nuevamente, por el resultado 3.16, en su segundo apartado, tenemos que α es una curva convexa en (a, b) .

c.s.q.d.

Corolario 3.21 Sea una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Tal que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciables en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$. Entonces:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Si } \left. \begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b) \\ 2. \text{ Si } \left. \begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b) \end{aligned}$$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\begin{aligned} \alpha: (A, B) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \end{aligned}$$

Y supongamos que tanto α_1 como α_2 son funciones dos veces diferenciable en $(a, b) \subseteq (A, B)$.

1. Supongamos además que ocurre:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \end{aligned}$$

Tendremos entonces:

$$\begin{aligned}\alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b) \\ \alpha'_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b)\end{aligned}$$

En virtud del resultado 3.17, podemos asegurar que α es cóncava en (a, b) .

2. Supongamos ahora que ocurre que:

$$\begin{aligned}\alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b)\end{aligned}$$

Tendremos entonces:

$$\begin{aligned}\alpha''_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha''_2(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es cóncava en } (a, b) \\ \alpha'_1(t) < 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_1 \text{ es estrictamente decreciente en } (a, b) \\ \alpha'_2(t) > 0, \quad \forall t \in (a, b) &\Rightarrow \alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (a, b)\end{aligned}$$

Y en virtud ahora del segundo apartado del resultado 3.17, podemos asegurar que α es cóncava en (a, b)

c.s.q.d

Vamos a finalizar esta sección enunciando y probando otra condición suficiente para determinar si una curva regular plana es convexa ó es cóncava en un intervalo.

Teorema 3.22 Sea una curva regular plana

$$\begin{aligned}\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

Y supongamos que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciable en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$ y que además $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$.

Entonces:

$$\begin{aligned}1. \text{ Si } \forall t \in (a, b), \quad \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha'_2(t)\alpha''_1(t)}{(\alpha'_1(t))^3} > 0 &\Rightarrow \alpha \text{ es convexa en } (a, b) \\ 2. \text{ Si } \forall t \in (a, b), \quad \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha'_2(t)\alpha''_1(t)}{(\alpha'_1(t))^3} < 0 &\Rightarrow \alpha \text{ es cóncava en } (a, b)\end{aligned}$$

Demostración: Tomemos una curva regular plana

$$\begin{aligned}\alpha: (A, B) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

Y supongamos que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciable en el intervalo $(a, b) \subseteq (A, B)$, y que $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$

Vamos a suponer, por comodidad para la notación, que ocurre que $(a, b) = (A, B)$, i.e., vamos a suponer que:

$$\begin{aligned}\alpha: (a, b) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))\end{aligned}$$

es una curva regular plana, que cumple que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciable en (a, b) , y que además: $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$.

Sabemos por el resultado 3.1, que bajo estas condiciones, la función:

$f = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})$ definida en $\alpha_1(a, b)$, verifica: $f \in C^1(\alpha_1(a, b))$ y $\text{traz}(\alpha) = \text{graf}(f)$.

i.e: α es una curva regular plana cuya traza es grafo de una función $f \in C^1(\alpha_1(a, b))$.

Vamos a fijarnos entonces en esta función $f \in C^1(\alpha_1(a, b))$.

Tomemos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$.

Como por 3.1, α_1^{-1} es diferenciable en x_0 , y α_2 es diferenciable en $\alpha_1^{-1}(x_0) \in (a, b)$, tenemos por la regla de la cadena:

$(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})$ es diferenciable en x_0 y:

$$(\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})'(x_0) = \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0)) (\alpha_1^{-1})'(x_0)$$

i.e: f es diferenciable en x_0 , y:

$$f'(x_0) = (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})'(x_0) = \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0)) (\alpha_1^{-1})'(x_0) = \frac{\alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0))}{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))}$$

Y esto sin duda $\forall x \in \alpha_1(a, b)$

Luego f es diferenciable en $\alpha_1(a, b)$ y:

$$\forall x \in \alpha_1(a, b), \quad f'(x) = \frac{\alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x))}{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))}$$

Pero bajo nuestras hipótesis, ocurren más cosas. Si tomamos $x_0 \in \alpha_1(a, b)$, ocurre:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1^{-1} \text{ es derivable en } x_0 \\ \alpha'_2 \text{ es derivable en } \alpha_1^{-1}(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha'_2 \circ \alpha_1^{-1}) \text{ es derivable en } x_0$$

También:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1^{-1} \text{ es derivable en } x_0 \\ \alpha'_1 \text{ es derivable en } \alpha_1^{-1}(x_0) \end{array} \right\} \Rightarrow (\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1}) \text{ es derivable en } x_0$$

Y además: $(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})(x_0) \neq 0$, pues: $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$

Por álgebra de derivadas tendremos entonces, que la función:

$$\begin{aligned} & \frac{(\alpha'_2 \circ \alpha_1^{-1})}{(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})} \text{ es derivable en } x_0 \quad \text{y:} \\ & \left[\frac{(\alpha'_2 \circ \alpha_1^{-1})}{(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})} \right]'(x_0) = \frac{(\alpha'_2 \circ \alpha_1^{-1})'(x_0)(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})(x_0) - (\alpha'_2 \circ \alpha_1^{-1})(x_0)(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})'(x_0)}{[(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})(x_0)]^2} \\ & = \frac{\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x_0))(\alpha_1^{-1})'(x_0)\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x_0))(\alpha_1^{-1})'(x_0)}{[(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})(x_0)]^2} = \\ & = \frac{\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))}{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))} - \frac{\alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x_0))}{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))} = \\ & = \frac{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))]^2}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))]^2} = \\ & = \frac{\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x_0))}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))]^3} \end{aligned}$$

Pero recordemos que:

$$\frac{(\alpha'_2 \circ \alpha_1^{-1})}{(\alpha'_1 \circ \alpha_1^{-1})} = f'$$

Por tanto lo que tenemos es que la función f es dos veces diferenciable en x_0 y que:

$$f''(x_0) = \frac{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x_0)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x_0))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x_0))}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x_0))]^3}$$

Y esto ocurre sin duda $\forall x_0 \in \alpha_1(a, b)$

i.e., f es una función dos veces diferenciable en $\alpha_1(a, b)$, y $\forall x \in \alpha_1(a, b)$,

$$f''(x) = \frac{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x))}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))]^3}$$

Tenemos en resumen, bajo nuestras hipótesis, que existe una función f , dos veces diferenciable en $\alpha_1(a, b)$, tal que: $\text{traz}(\alpha) = \text{graf}(f)$ y para la cual:

$$\forall x \in \alpha_1(a, b), \quad f''(x) = \frac{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x))}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))]^3}$$

1. Si suponemos ahora que además ocurre que:

$$\forall t \in (a, b), \quad \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha'_2(t)\alpha''_1(t)}{(\alpha'_1(t))^3} > 0$$

Y tomamos entonces: $x \in \alpha_1(a, b) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(x) \in (a, b) \Rightarrow$

$$\frac{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x))}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))]^3} > 0 \Rightarrow f''(x) > 0$$

i.e., tenemos que α es una curva regular plana cuya traza es grafo de una función f que es dos veces diferenciable en $\alpha_1(a, b)$ y que cumple además que: $\forall x \in \alpha_1(a, b), \quad f''(x) > 0$. Tenemos por tanto que α es una curva regular plana cuya traza es grafo de una función f que es convexa en $\alpha_1(a, b)$. En virtud entonces de un resultado anterior ocurre obligatoriamente que α es una curva convexa en (a, b)

2. Y si ocurre que:

$$\forall t \in (a, b), \quad \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha'_2(t)\alpha''_1(t)}{(\alpha'_1(t))^3} < 0$$

Y tomamos $x \in \alpha_1(a, b) \Rightarrow \alpha_1^{-1}(x) \in (a, b) \Rightarrow$

$$\frac{\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_2(\alpha_1^{-1}(x)) - \alpha'_2(\alpha_1^{-1}(x))\alpha''_1(\alpha_1^{-1}(x))}{[\alpha'_1(\alpha_1^{-1}(x))]^3} < 0 \Rightarrow f''(x) < 0$$

i.e., α es una curva regular plana cuya traza es grafo de una función f dos veces diferenciable en $\alpha_1(a, b)$, para la cual:

$$f''(x) < 0, \quad \forall x \in \alpha_1(a, b)$$

Luego α es una curva regular plana cuya traza es grafo de una función cóncava en $\alpha_1(a, b)$.

En virtud entonces del resultado 3.13, ocurre que α es una curva cóncava en (a, b) .

c.s.q.d.

Capítulo 4

ESTUDIO Y REPRESENTACIÓN DE ALGUNAS CURVAS CLÁSICAS

4. Estudio y representación de algunas curvas clásicas

Algunas curvas regulares planas han llegado hasta nosotros con un nombre propio o asociadas a algún estudio concreto de relativa importancia. Vamos a dedicar esta sección del escrito a recordar algunas de estas curvas, y vamos a utilizar lo aquí expuesto para llegar a su representación.

Empecemos con algunos de los ejemplos expuestos en apartados anteriores.

4.1 Circunferencia

Tomemos $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ arbitrario y $\rho > 0$ cualquiera, y definimos la correspondencia:

$$\alpha: (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \alpha(t) = (a + \rho \cos(t), b + \rho \sin(t))$$

Observemos en primer lugar que las funciones:

$$\alpha_1: (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \alpha_1(t) = a + \rho \cos(t) \\ \alpha_2: (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow \alpha_2(t) = b + \rho \sin(t)$$

Son ambas funciones de clase 1 en $(0, 2\pi)$, i.e.: $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(0, 2\pi)$.

Además:

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_1(t) = -\rho \sin(t) \\ \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_2(t) = \rho \cos(t)$$

Por lo que ocurre que $\forall t \in (0, 2\pi)$, $(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0, 0)$, pues si existiera $t \in (0, 2\pi)$, $(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) = (0, 0) \Rightarrow \exists t \in (0, 2\pi)$, $(-\rho \sin(t), \rho \cos(t)) = (0, 0)$

Entonces:

$$\exists t \in (0, 2\pi), \quad \begin{cases} -\rho \sin(t) = 0 \\ \rho \cos(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow -\rho \sin(t) = 0 \Rightarrow t = \pi$$

Pero si $t = \pi \Rightarrow \rho \cos(t) = \rho \cos(\pi) = -\rho \neq 0$

Vemos así, como $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(0, 2\pi)$, y además:

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0, 0)$$

Por lo que deducimos que α es una curva regular plana.

Bien pues vamos a intentar representar su traza en el plano $\mathbb{R}^2$

Observemos en principio lo siguiente:

$$\forall t \in (0, 2\pi), -1 \leq \cos(t) \leq 1 \Rightarrow -\rho \leq \rho \cos(t) \leq \rho \Rightarrow \\ \forall t \in (0, 2\pi), \quad a - \rho \leq a + \rho \cos(t) \leq a + \rho$$

i.e.,

$$\forall t \in (0, 2\pi), a - \rho \leq \alpha_1(t) \leq a + \rho \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha_1(t) \in [a - \rho, a + \rho]$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, 2\pi), -1 \leq \text{sen}(t) \leq 1 &\Rightarrow -\rho \leq \rho \text{sen}(t) \leq \rho \Rightarrow \\ \forall t \in (0, 2\pi), \quad b - \rho &\leq b + \rho \text{sen}(t) \leq b + \rho \end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall t \in (0, 2\pi), b - \rho \leq \alpha_2(t) \leq b + \rho \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha_2(t) \in [b - \rho, b + \rho]$$

Ocurre pues:

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in [a - \rho, a + \rho] \times [b - \rho, b + \rho]$$

Y por tanto:

$$\text{traz}(\alpha) = \{(\alpha_1(t), \alpha_2(t)), \quad t \in (0, 2\pi)\} \subseteq [a - \rho, a + \rho] \times [b - \rho, b + \rho]$$

La traza de nuestra curva se encuentra por tanto dentro del rectángulo del plano:

$$[a - \rho, a + \rho] \times [b - \rho, b + \rho]$$

Si afinamos algo más, tenemos:

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos(t) \leq 1 \\ 0 \leq \text{sen}(t) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \cos(t) \leq \rho \\ 0 \leq \rho \text{sen}(t) \leq \rho \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq a + \rho \cos(t) \leq a + \rho \\ b \leq b + \rho \text{sen}(t) \leq b + \rho \end{cases} \Rightarrow (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in [a, a + \rho] \times [b, b + \rho]$$

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos(t) \leq 0 \\ 0 \leq \text{sen}(t) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\rho \leq \rho \cos(t) \leq 0 \\ 0 \leq \rho \text{sen}(t) \leq \rho \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \rho \leq a + \rho \cos(t) \leq a \\ b \leq b + \rho \text{sen}(t) \leq b + \rho \end{cases} \Rightarrow \alpha(t) \in [a - \rho, a] \times [b, b + \rho]$$

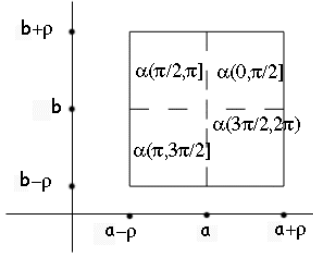
$$\text{Si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos(t) \leq 0 \\ -1 \leq \text{sen}(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\rho \leq \rho \cos(t) \leq 0 \\ -\rho \leq \rho \text{sen}(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \rho \leq a + \rho \cos(t) \leq a \\ b - \rho \leq b + \rho \text{sen}(t) \leq b \end{cases} \Rightarrow \alpha(t) \in [a - \rho, a] \times [b - \rho, b]$$

$$\text{Y si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos(t) \leq 1 \\ -1 \leq \text{sen}(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \rho \cos(t) \leq \rho \\ -\rho \leq \rho \text{sen}(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \leq a + \rho \cos(t) \leq a + \rho \\ b - \rho \leq b + \rho \text{sen}(t) \leq b \end{cases} \Rightarrow \alpha(t) \in [a, a + \rho] \times [b - \rho, b]$$

En resumen, tenemos:



$$\alpha\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) \subseteq [a, a + \rho] \times [b, b + \rho]$$

$$\alpha\left(\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right) \subseteq [a - \rho, a] \times [b, b + \rho]$$

$$\alpha\left(\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)\right) \subseteq [a - \rho, a] \times [b - \rho, b]$$

$$\alpha\left(\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)\right) \subseteq [a, a + \rho] \times [b - \rho, b]$$

Tenemos con lo anterior, una buena idea de donde se encuentra la traza de nuestra curva.

Para estudiar su crecimiento, podemos estudiar el cociente de las derivadas de las funciones α_2 y α_1 .

Ocurre, que:

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_1(t) &= -\rho \sin(t) \\ \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_2(t) &= \rho \cos(t) \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \alpha'_1(t) &= -\rho \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi \\ \alpha'_2(t) &= \rho \cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ ó } t = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Siendo además las funciones α'_1 y α'_2 continuas en $(0, 2\pi)$, ocurre según el teorema de Bolzano, que:

α'_1 no puede cambiar de signo en el intervalo $(0, \pi)$

α'_1 no puede cambiar de signo en el intervalo $(\pi, 2\pi)$

Y también:

α'_2 no puede cambiar de signo en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

α'_2 no puede cambiar de signo en el intervalo $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$

α'_2 no puede cambiar de signo en el intervalo $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

En base a esto, podemos hacer la siguiente tabla para estudiar el signo de nuestro cociente:

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\alpha'_1(t)$	—	—	+	+
$\alpha'_2(t)$	+	—	—	+
$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)}$	—	+	—	+

En virtud entonces del resultado 3.6, podemos asegurar, lo siguiente:

$$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} < 0, \quad \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha \text{ es estrictamente decreciente en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} > 0, \quad \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \alpha \text{ es estrictamente creciente en } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} < 0, \quad \forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha \text{ es estrictamente decreciente en } \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha_2'(t)}{\alpha_1'(t)} > 0, \quad \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \alpha \text{ es estrictamente creciente en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Para estudiar sus extremos, hemos de estudiar los extremos de la función α_2 .

$$\begin{aligned} \alpha_2'(t) = \rho \cos(t) = 0 &\Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad t = \frac{3\pi}{2} \\ \alpha_2''(t) = -\rho \sin(t), \quad &\forall t \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

Y ahora:

$$\begin{aligned} \alpha_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= -\rho \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\rho < 0 \\ \alpha_2''\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= -\rho \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \rho > 0 \end{aligned}$$

Tenemos entonces en virtud del resultado 3.11, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \alpha_2''\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 &\Rightarrow \alpha \text{ alcanza en } t_0 = \frac{\pi}{2} \text{ un máximo relativo} \\ \alpha_2''\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0, \quad \alpha_2''\left(\frac{3\pi}{2}\right) > 0 &\Rightarrow \alpha \text{ alcanza en } t_1 = \frac{3\pi}{2} \text{ un mínimo relativo} \end{aligned}$$

Concretamente estos puntos corresponden a los puntos de la traza de la curva siguientes:

$$\begin{aligned} \text{el máximo relativo } \alpha(t_0) &= \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(a + \rho \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), b + \rho \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (a, b + \rho) \\ \text{el mínimo relativo } \alpha(t_1) &= \alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(a + \rho \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), b + \rho \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (a, b - \rho) \end{aligned}$$

Por último para hacer un estudio sobre su concavidad o convexidad (sobre su curvatura), puesto que α_1 y α_2 son ambas dos veces diferenciables en $(0, 2\pi)$, vamos a empezar estudiando los signos de α_1'' y de α_2'' .

$$\begin{aligned} \alpha_1''(t) &= -\rho \cos(t), \quad \forall t \in (0, 2\pi) \\ \alpha_2''(t) &= -\rho \sin(t), \quad \forall t \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

Tenemos, que:

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\alpha_1''(t)$	—	+	+	—

Y

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\alpha_2''(t)$	—	—	+	+

Si estudiamos ahora, conjuntamente y por cuadrantes, los signos de las primeras y segundas derivadas de las funciones α_1 y α_2 , tendremos, en virtud de los resultados 3.18 a 3.21, lo siguiente:

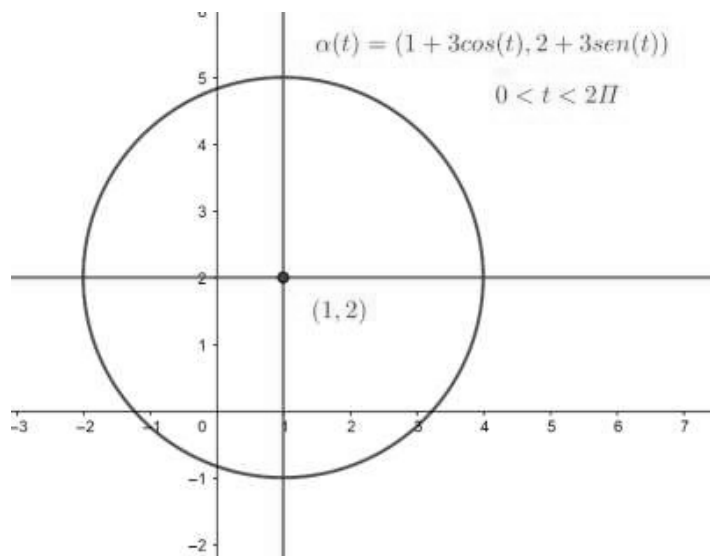
$$\left. \begin{array}{ll} \alpha_1''(t) < 0, & \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha_2''(t) < 0, & \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha_1'(t) < 0, & \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \alpha_2'(t) > 0, & \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow (3.21) \text{ } \alpha \text{ es cóncava en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha_1''(t) > 0, & \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \alpha_2''(t) < 0, & \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \alpha_1'(t) < 0, & \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ \alpha_2'(t) < 0, & \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{array} \right\} \Rightarrow (3.19) \text{ } \alpha \text{ es cóncava en } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha_1''(t) > 0, & \forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \alpha_2''(t) > 0, & \forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \alpha_1'(t) > 0, & \forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \\ \alpha_2'(t) < 0, & \forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow (3.18) \text{ } \alpha \text{ es convexa en } \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha_1''(t) < 0, & \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ \alpha_2''(t) > 0, & \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ \alpha_1'(t) > 0, & \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ \alpha_2'(t) > 0, & \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \end{array} \right\} \Rightarrow (3.20) \text{ } \alpha \text{ es convexa en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Conocido todo lo anterior, podemos hacer el siguiente esbozo de la traza de nuestra curva regular plana, que no es otra que la **circunferencia centrada en el punto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ y de radio $\rho > 0$** .



4.2 Espiral de Arquímedes

Esta curva toma su nombre en honor al Matemático griego **Arquímedes**, que estudió sus propiedades allá por el siglo III a. C.

Se describe en coordenadas polares como la curva formada por los puntos del plano polar, cuyo radio polar, es proporcional a su argumento polar.

Si tomamos entonces la función:

$$\begin{aligned} f: (0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow (0, 2\pi) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = \theta \end{aligned}$$

La espiral de Arquímedes correspondiente será el grafo de f en coordenadas polares:

$$\text{graf}_{pol}(f) = \{(f(\theta), \theta), \theta \in (0, 2\pi)\}$$

Dado que la función f es de clase 1 en $(0, 2\pi)$, asegura el resultado 2.4, que la función:

$$\begin{aligned} \alpha: (0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow \alpha(\theta) = (f(\theta) \cos(\theta), f(\theta) \sin(\theta)) \end{aligned}$$

es una curva regular plana, cuya traza coincide con la representación cartesiana del grafo de f en coordenadas polares.

Tenemos de esta manera que la traza de la curva α es la representación cartesiana de la espiral de Arquímedes.

Vamos a intentar representarla en el plano cartesiano, con todo lo aprendido en los apartados anteriores.

Consideremos entonces la curva regular plana, definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha: (0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (t \cos(t), t \sin(t)) \end{aligned}$$

Empecemos estudiando las regiones de $\mathbb{R}^2$ donde se encuentra su traza.

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos(t) \leq 1 \\ 0 \leq \sin(t) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \cos(t) \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq t \sin(t) \leq t \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha(t) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos(t) \leq 0 \\ 0 \leq \sin(t) \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t \leq t \cos(t) \leq 0 \\ 0 \leq t \sin(t) \leq t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\pi \leq t \cos(t) \leq 0 \\ 0 \leq t \sin(t) \leq \pi \end{cases}$$

Por tanto:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \Rightarrow \alpha(t) \in [-\pi, 0] \times [0, \pi]$$

$$\text{Si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq \cos(t) \leq 0 \\ -1 \leq \sin(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -t \leq t \cos(t) \leq 0 \\ -t \leq t \sin(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-3\pi}{2} \leq t \cos(t) \leq 0 \\ \frac{-3\pi}{2} \leq t \sin(t) \leq 0 \end{cases}$$

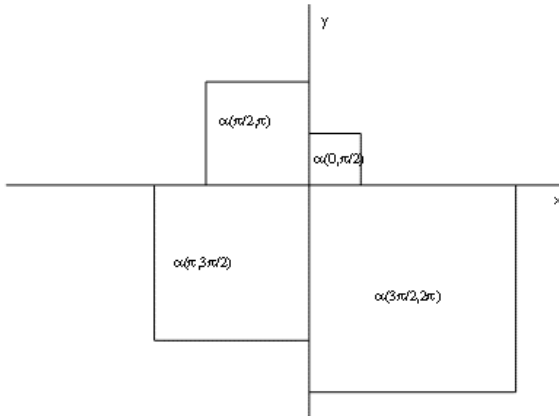
Por tanto:

$$\text{Si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \alpha(t) \in \left[\frac{-3\pi}{2}, 0\right] \times \left[\frac{-3\pi}{2}, 0\right]$$

$$\text{Y si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq \cos(t) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \cos(t) \leq t \\ -t \leq t \sin(t) \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq t \cos(t) \leq 2\pi \\ -2\pi \leq t \sin(t) \leq 0 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \alpha(t) \in [0, 2\pi] \times [-2\pi, 0]$$



En resumen, tenemos:

$$\begin{aligned} \alpha\left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \alpha\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &\subseteq [-\pi, 0] \times [0, \pi] \\ \alpha\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &\subseteq \left[\frac{-3\pi}{2}, 0\right] \times \left[\frac{-3\pi}{2}, 0\right] \\ \alpha\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) &\subseteq [0, 2\pi] \times [-2\pi, 0] \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\alpha_1(t) = 0 \Leftrightarrow t \cos(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \text{ ó } t = \frac{3\pi}{2}$$

i.e.,

$$\text{para } t = \frac{\pi}{2} \text{ ó } t = \frac{3\pi}{2} \text{ ocurre } \alpha_1(t) = 0$$

y por tanto $\text{traz}(\alpha)$ corta al eje OY .

Esto ocurre concretamente en los puntos:

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Y

$$\alpha\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left(\frac{3\pi}{2} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), \frac{3\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \left(0, -\frac{3\pi}{2}\right)$$

También:

$$\alpha_2(t) = 0 \leftrightarrow t \operatorname{sen}(t) = 0 \leftrightarrow \operatorname{sen}(t) = 0 \leftrightarrow t = \pi$$

i.e., para $t = \pi$, ocurre que $\alpha_2(t) = 0$ y por tanto $\operatorname{traz}(\alpha)$ corta al eje OX

Concretamente, ocurre esto en:

$$\alpha(\pi) = (\pi \cos(\pi), \pi \operatorname{sen}(\pi)) = (-\pi, 0)$$

Vamos a seguir ahora estudiando su crecimiento. Para ello vamos a estudiar el signo de las funciones: α'_1 y α'_2 .

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_1(t) &= \cos(t) - t \operatorname{sen}(t) \\ \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_2(t) &= \operatorname{sen}(t) + t \cos(t) \end{aligned}$$

Empecemos por ejemplo por $\alpha'_1(t)$. Y lo vamos a hacer en principio en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Vamos a considerar la función:

$$\begin{aligned} \beta_{11}: \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \beta_{11}(t) = \cos(t) - t \operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &\text{ es continua en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \beta_{11} &\text{ es derivable en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \beta'_{11}(t) &= -\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t) - t \cos(t) = -2 \operatorname{sen}(t) - t \cos(t) \end{aligned}$$

Y como $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $t > 0$, $\operatorname{sen}(t) > 0$ y $\cos(t) > 0$, tendremos:

$$\begin{aligned} \beta_{11} &\text{ es continua en } \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \beta_{11} \text{ es derivable en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ y} \\ \forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \beta'_{11}(t) &= -2 \operatorname{sen}(t) - t \cos(t) < 0 \end{aligned}$$

Por una consecuencia del Teorema del Valor Medio de Lagrange, podemos asegurar entonces que β_{11} es una función estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

De otro lado: $\beta_{11}(0) = \cos(0) - 0 \operatorname{sen}(0) = 1 > 0$

$$\beta_{11}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$$

Ahora, en virtud del resultado de Bolzano:

$$\exists t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \beta_{11}(t_1) = 0$$

Y siendo además β_{11} estrictamente decreciente en $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, podemos concluir, que:

$$\exists ! t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \beta_{11}(t_1) = 0$$

Ahora, como $\beta_{11}(t) = \alpha'_1(t)$, $\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ocurre:

$$\begin{aligned} \alpha'_1 &\text{ es estrictamente decreciente en } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \exists ! t_1 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha'_1(t_1) &= 0 \end{aligned}$$

Y desde luego:

$$\text{Si } t \in (0, t_1) \Rightarrow 0 < t < t_1 \Rightarrow \alpha'_1(t) > \alpha'_1(t_1) = 0 \Rightarrow \alpha'_1(t) > 0$$

$$\text{Si } t \in \left(t_1, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t_1 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha'_1(t) < \alpha'_1(t_1) = 0 \Rightarrow \alpha'_1(t) < 0$$

	$(0, t_1)$	$\left(t_1, \frac{\pi}{2}\right)$
$\alpha'_1(t)$	+	-

En $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ocurre para el signo de $\alpha'_1(t)$ lo siguiente:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), & \cos(t) < 0 \\ \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), & \sin(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), & \cos(t) < 0 \\ \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), & -t \sin(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \alpha'_1(t) = \cos(t) - t \sin(t) < 0 \end{aligned}$$

	$(0, t_1)$	$\left(t_1, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
$\alpha'_1(t)$	+	-	-

En $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ocurre:

Si notamos por β_{13} a la función definida en la forma:

$$\begin{aligned} \beta_{13}: \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow \beta_{13}(t) = \cos(t) - t \sin(t) \end{aligned}$$

Tendremos:

$$\beta_{13} \text{ es continua en } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\beta_{13} \text{ es derivable en } \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\text{y } \forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \beta'_{13}(t) = -\sin(t) - \sin(t) - t \cos(t) = -2 \sin(t) - t \cos(t)$$

Pero:

$$\text{si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin(t) < 0 \\ \cos(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \sin(t) > 0 \\ -t \cos(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow -2 \sin(t) - t \cos(t) > 0$$

Tenemos así:

$$\beta_{13} \text{ es continua en } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\beta_{13} \text{ es derivable en } \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\forall t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \beta'_{13}(t) = -2 \sin(t) - t \cos(t) > 0$$

En virtud de una consecuencia del Teorema del Valor Medio de Lagrange, tendremos que β_{13} es una función estrictamente creciente en $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Además:

$$\begin{aligned} \beta_{13}(\pi) &= \cos(\pi) - \pi \sin(\pi) = -1 < 0 \\ \beta_{13}\left(\frac{3\pi}{2}\right) &= \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) - \frac{3\pi}{2} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} > 0 \end{aligned}$$

En virtud ahora del Teorema de Bolzano, tendremos:

$$\exists t_3 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \beta_{13}(t_3) = 0$$

Uniendo esto al hecho de que β_{13} es estrictamente creciente en $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, tenemos:

$$\exists ! t_3 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \beta_{13}(t_3) = 0$$

Y como realmente: $\beta_{13}(t) = \alpha'_1(t)$, $\forall t \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$, tendremos:

$$\alpha'_1 \text{ es una función estrictamente creciente en } \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$$

$$\exists ! t_3 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \alpha'_1(t_3) = 0$$

Y desde luego, en estas condiciones:

$$\text{Si } t \in (\pi, t_3) \Rightarrow \pi < t < t_3 \Rightarrow \alpha'_1(t) < \alpha'_1(t_3) = 0 \Rightarrow \alpha'_1(t) < 0$$

$$\text{Si } t \in \left(t_3, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow t_3 < t \Rightarrow 0 = \alpha'_1(t_3) < \alpha'_1(t) \Rightarrow \alpha'_1(t) > 0$$

	$(0, t_1)$	$\left(t_1, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	(π, t_3)	$\left(t_3, \frac{3\pi}{2}\right)$
$\alpha'_1(t)$	+	-	-	-	+

En $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ ocurre:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos(t) > 0 \\ \sin(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(t) > 0 \\ -t \sin(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \cos(t) - t \sin(t) > 0$$

i.e:

$$\forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \alpha'_1(t) = \cos(t) - t \sin(t) > 0$$

En resumen, el signo de la función α'_1 en $(0, 2\pi)$, queda de la siguiente manera:

	$(0, t_1)$	$\left(t_1, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$	(π, t_3)	$\left(t_3, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\alpha'_1(t)$	+	-	-	-	+	+

Hemos descubierto además en la traza de α , dos puntos de tangente vertical, corresponderían a $\alpha(t_1)$ y $\alpha(t_3)$, puesto que ocurre que:

$$\alpha'_1(t_1) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha'_1(t_3) = 0$$

Vamos a estudiar ahora el signo de la función $\alpha'_2(t)$.

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_2(t) = \sin(t) + t \cos(t)$$

En $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ocurre:

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin(t) > 0 \\ \cos(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(t) > 0 \\ t \cos(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin(t) + t \cos(t) > 0$$

i.e:

$$\forall t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \alpha'_2(t) = \sin(t) + t \cos(t) > 0$$

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
$\alpha'_2(t)$	+

En $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ocurre:

Si tomamos la función:

$$\beta_{22}: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \beta_{22}(t) = \text{sen}(t) + t \cos(t)$$

Tenemos:

β_{22} es una función continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

β_{22} es una función diferenciable en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ y

$$\forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \beta'_{22}(t) = \cos(t) + \cos(t) - t \sin(t) = 2 \cos(t) - t \sin(t)$$

Además:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos(t) < 0 \\ \sin(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cos(t) < 0 \\ -t \sin(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \cos(t) - t \sin(t) < 0$$

i.e.,

β_{22} es continua en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

β_{22} es derivable en $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, y $\forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\beta'_{22}(t) < 0$

Según una consecuencia del Teorema del Valor Medio de Lagrange, tendremos que:

β_{22} es una función estrictamente decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

De otro lado:

$$\beta_{22}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

$$\beta_{22}(\pi) = \text{sen}(\pi) + \pi \cos(\pi) = -\pi < 0$$

Según el resultado de Bolzano, ocurrirá también:

$$\exists t_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \beta_{22}(t_2) = 0$$

Como además es β_{22} estrictamente decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, lo que ocurre es que:

$$\exists ! t_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \beta_{22}(t_2) = 0$$

Y como realmente es $\beta_{22}(t) = \alpha'_2(t) \quad \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tendremos:

$$\alpha'_2 \text{ es estrictamente decreciente en } \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \exists ! t_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \alpha'_2(t_2) = 0$$

Y además:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, t_2\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < t < t_2 \Rightarrow \alpha'_2(t) > \alpha'_2(t_2) = 0 \Rightarrow \alpha'_2(t) > 0$$

$$\text{Si } t \in (t_2, \pi) \Rightarrow t_2 < t < \pi \Rightarrow 0 = \alpha'_2(t_2) > \alpha'_2(t) \Rightarrow \alpha'_2(t) < 0$$

Tendremos:

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, t_2\right)$	(t_2, π)
$\alpha'_2(t)$	+	+	-

En $(\pi, \frac{3\pi}{2})$ ocurre:

$$\text{Si } t \in (\pi, \frac{3\pi}{2}) \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) < 0 \\ \text{cos}(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{sen}(t) < 0 \\ t \text{cos}(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sen}(t) + t \text{cos}(t) < 0$$

i.e:

$$\forall t \in (\pi, \frac{3\pi}{2}), \quad \alpha'_2(t) = \text{sen}(t) + t \text{cos}(t) < 0$$

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, t_2)$	(t_2, π)	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$
$\alpha'_2(t)$	+	+	-	-

En $(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$ ocurre:

Si tomamos la función:

$$\beta_{24}: \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \beta_{24}(t) = \text{sen}(t) + t \text{cos}(t)$$

Tendremos:

$$\beta_{24} \text{ es continua en } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$\beta_{24} \text{ es derivable en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ y } \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \beta'_{24}(t) = 2 \text{cos}(t) - t \text{sen}(t)$$

Pero:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \text{cos}(t) > 0 \\ \text{sen}(t) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \text{cos}(t) > 0 \\ -t \text{sen}(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \text{cos}(t) - t \text{sen}(t) > 0$$

i.e.,

$$\beta_{24} \text{ es continua en } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

$$\beta_{24} \text{ es derivable en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ y } \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \beta'_{24}(t) > 0$$

En virtud de una consecuencia del Teorema del Valor Medio de Lagrange, ocurrirá:

$$\beta_{24} \text{ es una función estrictamente creciente en } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$$

También se tiene:

$$\beta_{24}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \frac{3\pi}{2} \text{cos}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

$$\beta_{24}(2\pi) = \text{sen}(2\pi) + 2\pi \text{cos}(2\pi) = 2\pi > 0$$

Por tanto en virtud del teorema de Bolzano:

$$\exists t_4 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \beta_{24}(t_4) = 0$$

Y siendo β_{24} una función estrictamente creciente en $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, tenemos:

$$\exists ! t_4 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \beta_{24}(t_4) = 0$$

Como ocurre que $\beta_{24}(t) = \alpha'_2(t)$, $\forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, lo que tendremos es lo siguiente:

$$\alpha'_2 \text{ es estrictamente creciente en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \text{ y } \exists ! t_4 \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \alpha'_2(t_4) = 0$$

Además:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, t_4\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < t < t_4 \Rightarrow \alpha'_2(t) < \alpha'_2(t_4) = 0 \Rightarrow \alpha'_2(t) < 0$$

$$\text{Si } t \in (t_4, 2\pi) \Rightarrow t_4 < t < 2\pi \Rightarrow 0 = \alpha'_2(t_4) < \alpha'_2(t) \Rightarrow \alpha'_2(t) > 0$$

El signo de la función α'_2 queda en resumen de la siguiente manera:

	$(0, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, t_2)$	(t_2, π)	$(\pi, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, t_4)$	$(t_4, 2\pi)$
$\alpha'_2(t)$	+	+	-	-	-	+

Además hemos descubierto que sólo hay dos puntos $t \in (0, 2\pi)$ para los cuales: $\alpha'_2(t) = 0$, i.e., sólo hay dos puntos de la traza de α donde su tangente es horizontal, ó visto de otra forma, sólo hay dos candidatos a extremos: $t_2 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $t_4 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$.

$$\text{Como } \alpha''_2(t) = \beta'_{22}(t) = 2 \cos(t) - t \sin(t) < 0, \quad \forall t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\text{Y } \alpha''_2(t) = \beta'_{24}(t) = 2 \cos(t) - t \sin(t) > 0, \quad \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$$

Tendremos:

$$\alpha'_2(t_2) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha''_2(t_2) = 2 \cos(t_2) - t_2 \sin(t_2) < 0 \Rightarrow$$

α alcanza en t_2 un máximo relativo.

$$\alpha'_2(t_4) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha''_2(t_4) = 2 \cos(t_4) - t_4 \sin(t_4) > 0 \Rightarrow$$

α alcanza en t_4 un mínimo relativo.

Para finalizar con el estudio del crecimiento, hagamos la siguiente tabla:

	$(0, t_1)$	$(t_1, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, t_2)$	(t_2, π)	(π, t_3)	$(t_3, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, t_4)$	$(t_4, 2\pi)$
$\alpha'_2(t)$	+	+	+	-	-	-	-	+
$\alpha'_1(t)$	+	-	-	-	-	+	+	+
$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)}$	+	-	-	+	+	-	-	+

Tenemos con todo lo anterior:

α es estrictamente creciente en $(0, t_1)$

α es estrictamente decreciente en $(t_1, \frac{\pi}{2})$

α es estrictamente decreciente en $(\frac{\pi}{2}, t_2)$

α es estrictamente creciente en (t_2, π)

α es estrictamente creciente en (π, t_3)

α es estrictamente decreciente en $(t_3, \frac{3\pi}{2})$

α es estrictamente decreciente en $(\frac{3\pi}{2}, t_4)$

α es estrictamente creciente en $(t_4, 2\pi)$

En t_1 y t_3 tenemos dos puntos de $\text{traz}(\alpha)$ con tangente vertical.

En t_2 y t_4 tenemos dos puntos de $\text{traz}(\alpha)$ con tangente horizontal, y además α alcanza un máximo relativo en t_2 y un mínimo relativo en t_4 .

Para estudiar por último las regiones de concavidad ó convexidad de la curva α , vamos a estudiar el signo de la función:

$$\frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3}$$

Tenemos:

$$\alpha_1'(t) = \cos(t) - t \sin(t), \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

$$\alpha_2'(t) = \sin(t) + t \cos(t), \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

Ocorre desde luego que tanto α_1' como α_2' son funciones diferenciables en $(0, 2\pi)$ y $\forall t \in (0, 2\pi)$,

$$\alpha_1''(t) = -\sin(t) - \sin(t) - t \cos(t) = -2 \sin(t) - t \cos(t)$$

$$\alpha_2''(t) = \cos(t) + \cos(t) - t \sin(t) = 2 \cos(t) - t \sin(t)$$

Entonces, si $t \in (0, 2\pi)$, tendremos:

$$\begin{aligned} & \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) = \\ & (\cos(t) - t \sin(t))(2 \cos(t) - t \sin(t)) + (\sin(t) + t \cos(t))(2 \sin(t) + t \cos(t)) \\ & = 2 \cos^2(t) - t \sin(t) \cos(t) - 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \sin^2(t) + 2 \sin^2(t) + \\ & \quad + t \sin(t) \cos(t) + 2t \sin(t) \cos(t) + t^2 \cos^2(t) = \\ & = 2 (\cos^2(t) + \sin^2(t)) + t^2 (\sin^2(t) + \cos^2(t)) = 2 + t^2 \end{aligned}$$

i.e:

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) = 2 + t^2 > 0$$

Podemos hacer ahora entonces la siguiente tabla:

	$(0, t_1)$	$(t_1, \frac{\pi}{2})$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	(π, t_3)	$(t_3, \frac{3\pi}{2})$	$(\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$
$\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)$	+	+	+	+	+	+
$(\alpha_1'(t))^3$	+	-	-	-	+	+
$\frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3}$	+	-	-	-	+	+

Tenemos de esta forma, resumiendo:

$\alpha: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular plana, que cumple:

$$\alpha_1'(t) \neq 0, \quad \forall t \in (0, t_1)$$

α_1 y α_2 son dos veces diferenciables en $(0, t_1)$, y además:

$$\forall t \in (0, t_1), \quad \frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3} > 0$$

En virtud del resultado 3.22, podemos asegurar que la curva α es convexa en $(0, t_1)$

De la misma manera, tenemos:

$\alpha: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular plana, que cumple:

$$\alpha_1'(t) \neq 0, \quad \forall t \in (t_1, t_3)$$

α_1 y α_2 son dos veces diferenciables en (t_1, t_3) , y además:

$$\forall t \in (t_1, t_3), \quad \frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3} < 0$$

En virtud del mismo resultado, tendremos que α es cóncava en (t_1, t_3) .

Y también tenemos:

$\alpha: (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una curva regular plana, que cumple:

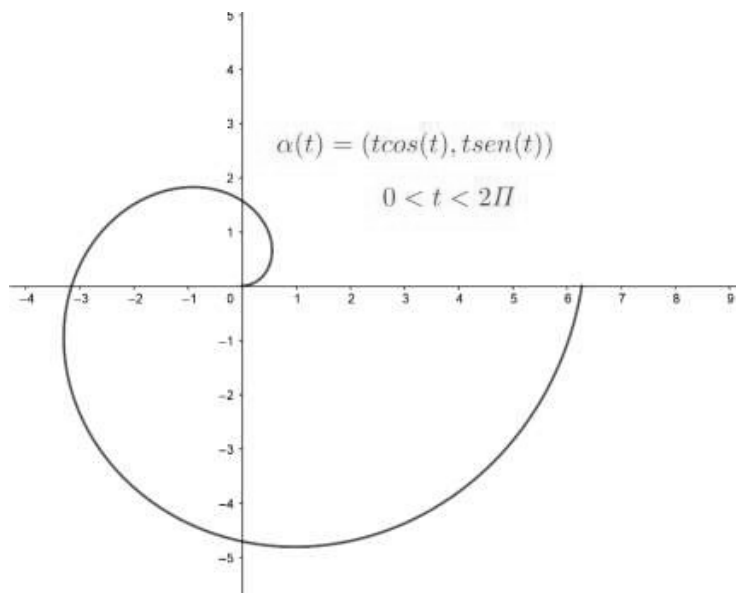
$$\alpha'_1(t) \neq 0, \quad \forall t \in (t_3, 2\pi)$$

α_1 y α_2 son dos veces diferenciables en $(t_3, 2\pi)$, y además:

$$\forall t \in (t_3, 2\pi), \quad \frac{\alpha'_1(t)\alpha''_2(t) - \alpha'_2(t)\alpha''_1(t)}{(\alpha'_1(t))^3} > 0$$

Y por tanto α es convexa en $(t_3, 2\pi)$.

Ahora ya, con toda la información anterior, podemos hacer el siguiente esbozo de la traza de α .



4.3 Cardioide

La **cardioide** es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sobre otra de igual radio.

En coordenadas polares ya quedó descrita en uno de los ejemplos de un apartado anterior.

Para su representación, consideramos la correspondencia siguiente:

$$\begin{aligned} \alpha: (-\pi, \pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \alpha(t) &= (a(1 + \cos(t)) \cos(t), a(1 + \cos(t)) \sin(t)) \end{aligned}$$

Siendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

En principio, las funciones:

$$\alpha_1(t) = a(1 + \cos(t)) \cos(t), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

$$\alpha_2(t) = a(1 + \cos(t)) \sin(t), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

Son, sin duda, por álgebra de funciones continuas y por álgebra de derivadas, dos funciones continuas y derivables en $(-\pi, \pi)$. Además:

$$\begin{aligned} \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha'_1(t) &= (-a \sin(t)) \cos(t) - a(1 + \cos(t)) \sin(t) = \\ &= -a \sin(t)(\cos(t) + 1 + \cos(t)) = -a \sin(t)(1 + 2 \cos(t)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha'_2(t) &= -a \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(t) + a(1 + \cos(t)) \cos(t) = \\ &= -a \operatorname{sen}^2(t) + a \cos(t) + a \cos^2(t) = a(\cos(t) + \cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)) = \\ &= a(\cos(t) + \cos(2t))\end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned}\forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha'_1(t) &= -a \operatorname{sen}(t)(1 + 2 \cos(t)) \\ \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha'_2(t) &= a(\cos(t) + \cos(2t))\end{aligned}$$

Y α'_1 y α'_2 son funciones continuas en $(-\pi, \pi)$, nuevamente por álgebra y composición de funciones continuas.

Más aún, si $t \in (-\pi, \pi)$,

$$\begin{aligned}\alpha'_1(t) = -a \operatorname{sen}(t)(1 + 2 \cos(t)) = 0 &\leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(t) = 0 \\ \text{ó} \\ 1 + 2 \cos(t) = 0 \end{cases} \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(t) = 0 \\ \text{ó} \\ 2 \cos(t) = -1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(t) = 0 \\ \text{ó} \\ \cos(t) = -\frac{1}{2} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = -\frac{2\pi}{3} \\ t = \frac{2\pi}{3} \end{cases}\end{aligned}$$

Pero:

$$\alpha'_2(0) = a(\cos(0) + \cos(0)) = 2a \neq 0$$

$$\begin{aligned}\alpha'_2\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= a\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\right) = a\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = \\ &= a\left(-\frac{1}{2} + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2} + \cos(\pi) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= a\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = a(-1) = -a \neq 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha'_2\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= a\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2} + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \\ &= a\left(-\frac{1}{2} + \cos(\pi) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{sen}(\pi) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = a\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) = -a \neq 0\end{aligned}$$

Deducimos de lo anterior que:

$$\forall t \in (-\pi, \pi), \quad (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0, 0)$$

Y por tanto es α , en efecto una curva regular plana.

En realidad, hemos descubierto además que en la traza de α hay tres puntos de tangente vertical, los correspondientes a los valores del parámetro: $-\frac{2\pi}{3}, 0$ y $\frac{2\pi}{3}$, pues:

$$\alpha'_1\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = 0, \quad \alpha'_1(0) = 0, \quad \alpha'_1\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

Vamos a intentar ahora, hacernos una idea de las regiones del plano en las que se encuentra nuestra curva.

$$\begin{aligned}\text{Si } t \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right), -1 \leq \cos(t) \leq 0 &\Rightarrow 0 \leq 1 + \cos(t) \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 \leq \cos(t) \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 0 &\Rightarrow -1 \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -a \leq a(1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 0 &\Rightarrow -a \leq \alpha_1(t) \leq 0\end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} 0 \leq 1 + \cos(t) \leq 1 \\ -1 \leq \sin(t) \leq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 \leq (1 + \cos(t)) \sin(t) \leq 0 & \Rightarrow -a \leq a(1 + \cos(t)) \sin(t) \leq 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow -a \leq \alpha_2(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \text{Si } t \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha(t) \in [-a, 0] \times [-a, 0] \\ & \text{Si } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad 0 \leq \cos(t) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq (1 + \cos(t)) \leq 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(t) \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) & \leq 2 \cos(t) \Rightarrow 0 \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 2 \\ \Rightarrow 0 \leq a(1 + \cos(t)) \cos(t) & \leq 2a \Rightarrow 0 \leq \alpha_1(t) \leq 2a \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} 1 \leq (1 + \cos(t)) \leq 2 \\ -1 \leq \sin(t) \leq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin(t) \geq (1 + \cos(t)) \sin(t) \geq 2 \sin(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow -2 \leq 2 \sin(t) \leq (1 + \cos(t)) \sin(t) & \leq \sin(t) \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -2a \leq a(1 + \cos(t)) \sin(t) \leq 0 & \Rightarrow -2a \leq \alpha_2(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \text{Si } t \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \Rightarrow \alpha(t) \in [0, 2a] \times [-2a, 0] \\ & \text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad 0 \leq \cos(t) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1 + \cos(t) \leq 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(t) \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) & \leq 2 \cos(t) \Rightarrow 0 \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq a(1 + \cos(t)) \cos(t) & \leq 2a \Rightarrow 0 \leq \alpha_1(t) \leq 2a \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} 1 \leq (1 + \cos(t)) \leq 2 \\ 0 \leq \sin(t) \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin(t) \leq (1 + \cos(t)) \sin(t) \leq 2 \sin(t) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq (1 + \cos(t)) \sin(t) \leq 2 & \Rightarrow 0 \leq \alpha_2(t) \leq 2a \end{aligned}$$

Luego:

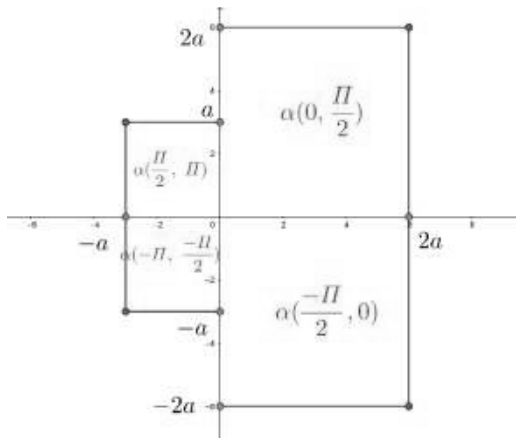
$$\begin{aligned} & \text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha(t) \in [0, 2a] \times [0, 2a] \\ & \text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad -1 \leq \cos(t) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 + \cos(t) \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \geq (1 + \cos(t)) \cos(t) \geq \cos(t) & \geq -1 \Rightarrow -1 \leq (1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -a \leq a(1 + \cos(t)) \cos(t) \leq 0 & \Rightarrow -a \leq \alpha_1(t) \leq 0 \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} 0 \leq (1 + \cos(t)) \leq 1 \\ 0 \leq \sin(t) \leq 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 \leq (1 + \cos(t)) \sin(t) \leq \sin(t) \leq 1 \Rightarrow \\ 0 \leq a(1 + \cos(t)) \sin(t) \leq a & \Rightarrow 0 \leq \alpha_2(t) \leq a \end{aligned}$$

Luego:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \alpha(t) \in [-a, 0] \times [0, a]$$



Intentemos ver ahora si la traza de nuestra curva corta a los ejes.

$$\alpha_1(t) = 0 \Leftrightarrow a(1 + \cos(t)) \cos(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos(t) = 0 \\ \cos(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t) = -1 \\ \cos(t) = 0 \end{cases}$$

Pero: $\forall t \in (-\pi, \pi), \cos(t) \neq -1$

Luego:

$$\alpha_1(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = 0 \Leftrightarrow$$

$$t = -\frac{\pi}{2} \text{ ó } t = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto: $\text{traz}(\alpha)$ corta al eje OY en los puntos:

$$\begin{aligned} \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) &= \left(a\left(1 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right), a\left(1 + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= (a \cdot 1 \cdot 0, a \cdot 1 \cdot (-1)) = (0, -a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \left(a\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), a\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \\ &= (a \cdot 1 \cdot 0, a \cdot 1 \cdot 1) = (0, a) \end{aligned}$$

Para el eje OX , tenemos:

$$\alpha_2(t) = 0 \Leftrightarrow a(1 + \cos(t)) \sin(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \cos(t) = 0 \\ \sin(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Por tanto: $\text{traz}(\alpha)$ corta al eje OX en el punto:

$$\alpha(0) = (a(1 + \cos(0)) \cos(0), a(1 + \cos(0)) \sin(0)) = (a \cdot 2 \cdot 1, a \cdot 2 \cdot 0) = (2a, 0)$$

Para estudiar su crecimiento, intentemos conocer los signos de las funciones α'_1 y α'_2 .

$$\alpha'_1(t) = -a \sin(t) (1 + \cos(t)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

$$\alpha'_2(t) = a(\cos(t) + \cos(2t)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

Hemos visto ya como ocurre, que:

$$\alpha'_1(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{2\pi}{3} \\ t = 0 \\ t = \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Y desde luego, siendo α'_1 una función continua en $(-\pi, \pi)$, no puede haber cambios de signo entre dos ceros consecutivos de la función, ni entre $-\pi$ y $-\frac{2\pi}{3}$, ni entre $\frac{2\pi}{3}$ y π (por el teorema de Bolzano, por ejemplo).

De otro lado, la función coseno es una función estrictamente creciente en $[-\pi, 0]$, por lo que ocurre:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) &\Rightarrow -\pi < t < -\frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos(t) < \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2 \cos(t) < -1 \Rightarrow 1 + \cos(2t) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right) &\Rightarrow -\frac{2\pi}{3} < t < 0 \Rightarrow \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < \cos(t) \Rightarrow -\frac{1}{2} < \cos(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 < 2\cos(t) \Rightarrow 0 < 1 + 2\cos(t) \end{aligned}$$

Y la función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$, entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) &\Rightarrow 0 < t < \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \cos(t) > \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(t) > -\frac{1}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2\cos(t) > -1 \Rightarrow 1 + 2\cos(t) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) &\Rightarrow \frac{2\pi}{3} < t < \pi \Rightarrow -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) > \cos(t) \Rightarrow -\frac{1}{2} > \cos(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 > 2\cos(t) \Rightarrow 0 > 1 + 2\cos(t) \end{aligned}$$

Con todo lo anterior, y conociendo el signo de la función seno, queda el signo de α'_1 de la siguiente manera:

	$\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$
$-a$	—	—	—	—
$1 + 2\cos(t)$	—	+	+	—
$\text{sen}(t)$	—	—	+	+
$\alpha'_1(t)$	—	+	—	+

Hagamos ahora lo propio con el signo de $\alpha'_2(t)$.

$$\begin{aligned} \alpha'_2(t) = 0 &\Leftrightarrow a(\cos(t) + \cos(2t)) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) + \cos(2t) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(t) + \cos^2(t) - \text{sen}^2(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) + \cos^2(t) - (1 - \cos^2(t)) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(t) + \cos^2(t) - 1 + \cos^2(t) = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2(t) + \cos(t) - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \cos(t) = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{-1 \pm 3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(t) = -1 \\ \text{ó} \\ \cos(t) = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Ahora bien:

$$\cos(t) \neq -1, \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

Luego:

$$\alpha'_2(t) = 0 \Leftrightarrow \cos(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{3} \\ \text{ó} \\ t = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Por la misma razón que ocurría para α'_1 , no puede haber cambios de signo de la función α'_2 en los intervalos: $\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$, en $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$ y en $\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$

Además, hemos visto realmente que:

$$\begin{aligned} \forall t \in (-\pi, \pi), \quad 2\cos^2(t) + \cos(t) - 1 &= 2(1 + \cos(t))\left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \cos^2(t) + \cos(t) - 1 + \cos^2(t) &= 2(1 + \cos(t))\left(\cos(t) - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \cos^2(t) + \cos(t) - (1 - \cos^2(t)) = 2(1 + \cos(t)) \left(\cos(t) - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \cos^2(t) - \sin^2(t) + \cos(t) = 2(1 + \cos(t)) \left(\cos(t) - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \cos(t) + \cos(2t) = 2(1 + \cos(t)) \left(\cos(t) - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad a(\cos(t) + \cos(2t)) = 2a(1 + \cos(t)) \left(\cos(t) - \frac{1}{2} \right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha'_2(t) = 2a(1 + \cos(t)) \left(\cos(t) - \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Estudiaremos desde esta expresión el signo de la función α'_2 .

Como la función coseno es estrictamente creciente en $[-\pi, 0]$, tendremos:

$$\begin{aligned}
 \text{Si } t \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right) &\Rightarrow -\pi < t < -\frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(t) < \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \cos(t) - \frac{1}{2} < 0 \\
 \text{Si } t \in \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) &\Rightarrow -\frac{\pi}{3} < t < 0 \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \cos(t) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0 < \cos(t) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Y como la función coseno es estrictamente decreciente en $[0, \pi]$, tendremos:

$$\begin{aligned}
 \text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) &\Rightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos(t) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(t) - \frac{1}{2} > 0 \\
 \text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) &\Rightarrow \frac{\pi}{3} < t < \pi \Rightarrow \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) > \cos(t) \Rightarrow 0 > \cos(t) - \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Como sabemos también, que $\forall t \in (-\pi, \pi)$, $\cos(t) \neq -1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \cos(t) > -1 \Rightarrow \forall t \in (-\pi, \pi), \quad 1 + \cos(t) > 0$$

Podemos hacer entonces la siguiente tabla para el signo de α'_2 .

	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
$2a$	+	+	+
$1 + \cos(t)$	+	+	+
$\cos(t) - \frac{1}{2}$	-	+	-
$\alpha'_2(t)$	-	+	-

Para estudiar el signo del cociente $\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)}$ hacemos ahora la siguiente tabla:

	$\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$
$\alpha'_2(t)$	-	-	+	+	-	-
$\alpha'_1(t)$	-	+	+	-	-	+
$\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)}$	+	-	+	-	+	-

Tenemos en resumen, sobre el crecimiento de nuestra curva, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\alpha \text{ es estrictamente creciente en } \left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right) \\
 &\alpha \text{ es estrictamente decreciente en } \left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right) \\
 &\alpha \text{ es estrictamente creciente en } \left(-\frac{\pi}{3}, 0\right) \\
 &\alpha \text{ es estrictamente decreciente en } \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \\
 &\alpha \text{ es estrictamente creciente en } \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \\
 &\alpha \text{ es estrictamente decreciente en } \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)
 \end{aligned}$$

Sabemos además que en la traza de α hay tres puntos con tangente vertical, los correspondientes a los valores del parámetro: $-\frac{2\pi}{3}$, 0 y $\frac{2\pi}{3}$, i.e., en los puntos:

$$\begin{aligned}
 \alpha\left(-\frac{2\pi}{3}\right) &= \left(a\left(1 + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right), a\left(1 + \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\
 &= \left(a\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right), a\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{a}{4}, -\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$\alpha(0) = \left(a(1 + \cos(0)) \cos(0), a(1 + \cos(0)) \operatorname{sen}(0)\right) = (a \cdot 2.1, a \cdot 2.0) = (2a, 0)$$

$$\begin{aligned}
 \alpha\left(\frac{2\pi}{3}\right) &= \left(a\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right), a\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\
 &= \left(a\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right), a\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \left(-\frac{a}{4}, \frac{a\sqrt{3}}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Y también que en la traza de α hay dos puntos con tangente horizontal, los correspondientes a los valores del parámetro: $-\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned}
 \alpha\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= \left(a\left(1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right), a\left(1 + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\
 &= \left(a\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), a\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right) = \\
 &= \left(a\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}, -a\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3a}{4}, -\frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \left(a\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \cos\left(\frac{\pi}{3}\right), a\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \\
 &= \left(a\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2}, a\left(1 + \frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{3a}{4}, \frac{3a\sqrt{3}}{4}\right)
 \end{aligned}$$

Como además la función:

$$\alpha'_2(t) = a(\cos(t) + \cos(2t)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

es una función diferenciable en $(-\pi, \pi)$,

$$\alpha_2''(t) = a(-\operatorname{sen}(t) - 2 \operatorname{sen}(2t)) = -a(\operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(2t)), \quad \forall t \in (-\pi, \pi)$$

Y

$$\begin{aligned} \alpha_2''\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= -a\left(\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{3}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right) = a\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \\ &= a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = a \frac{3\sqrt{3}}{2} > 0 \end{aligned}$$

En virtud del resultado 3.11, podemos asegurar que la curva α alcanza un mínimo relativo en $t = -\frac{\pi}{3}$

Por la misma razón, como:

$$\alpha_2''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -a\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -a\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -a \frac{3\sqrt{3}}{2} < 0$$

Podemos asegurar que α alcanza un máximo relativo en $t = \frac{\pi}{3}$.

Vamos a intentar determinar ahora regiones de concavidad o convexidad para nuestra curva.

Empecemos observando que tanto α_1' como α_2' son dos funciones diferenciables en $(-\pi, \pi)$, y que:

$$\begin{aligned} \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha_1''(t) &= -a \cos(t)(1 + 2 \cos(t)) - a \operatorname{sen}(t)(-2 \operatorname{sen}(t)) = \\ &= -a \cos(t) - 2a \cos^2(t) + 2a \operatorname{sen}^2(t) = -a \cos(t) - 2a(\cos^2(t) - \operatorname{sen}^2(t)) = \\ &= -a \cos(t) - 2a \cos(2t) = -a(\cos(t) + 2 \cos(2t)) \end{aligned}$$

Y

$$\forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha_2''(t) = a(-\operatorname{sen}(t) - 2 \operatorname{sen}(2t)) = -a(\operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(2t))$$

Tendremos así:

$$\begin{aligned} \forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) &= \\ &= [-a \operatorname{sen}(t)(1 + 2 \cos(t))][-a(\operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(2t))] - \\ &\quad - [a(\cos(t) + \cos(2t))][-a(\cos(t) + 2 \cos(2t))] = \\ &= a^2(\operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(t) \cos(t))(\operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(2t)) + \\ &\quad + a^2(\cos(t) + \cos(2t))(\cos(t) + 2 \cos(2t)) = \\ &= a^2(\operatorname{sen}(t) + \operatorname{sen}(2t))(\operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}(2t)) + \\ &\quad + a^2(\cos(t) + \cos(2t))(\cos(t) + 2 \cos(2t)) = \\ &= a^2(\operatorname{sen}^2(t) + 2 \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(2t) + \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(t) + 2 \operatorname{sen}^2(2t)) + \\ &\quad + a^2(\cos^2(t) + 2 \cos(t) \cos(2t) + \cos(2t) \cos(t) + 2 \cos^2(2t)) = \\ &= a^2 \operatorname{sen}^2(t) + 3a^2 \operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(2t) + 2a^2 \operatorname{sen}^2(2t) + \\ &\quad + a^2 \cos^2(t) + 3a^2 \cos(t) \cos(2t) + 2a^2 \cos^2(2t) = \\ &= a^2(\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)) + 3a^2(\operatorname{sen}(t) \operatorname{sen}(2t) + \cos(t) \cos(2t)) + \\ &\quad + 2a^2(\operatorname{sen}^2(2t) + \cos^2(2t)) = \\ &= a^2 + 3a^2(\cos(2t) \cos(t) + \operatorname{sen}(2t) \operatorname{sen}(t)) + 2a^2 = \\ &= a^2 + 3a^2(\cos(2t - t)) + 2a^2 = 3a^2 + 3a^2 \cos(t) = 3a^2(1 + \cos(t)) \end{aligned}$$

Tenemos por tanto:

$$\forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) = 3a^2(1 + \cos(t))$$

Como sabemos además, que:

$$\forall t \in (-\pi, \pi), \quad \cos(t) > -1$$

Ocurrirá, que:

$$\forall t \in (-\pi, \pi), \quad \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) = 3a^2(1 + \cos(t)) > 0$$

Para estudiar el signo de la función:

$$\frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3}$$

podemos hacer entonces la siguiente tabla:

	$\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right)$	$\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$
$\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)$	+	+	+	+
$(\alpha_1'(t))^3$	-	+	-	+
$\frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3}$	-	+	-	+

Y en virtud del resultado 3.22, ocurrirá:

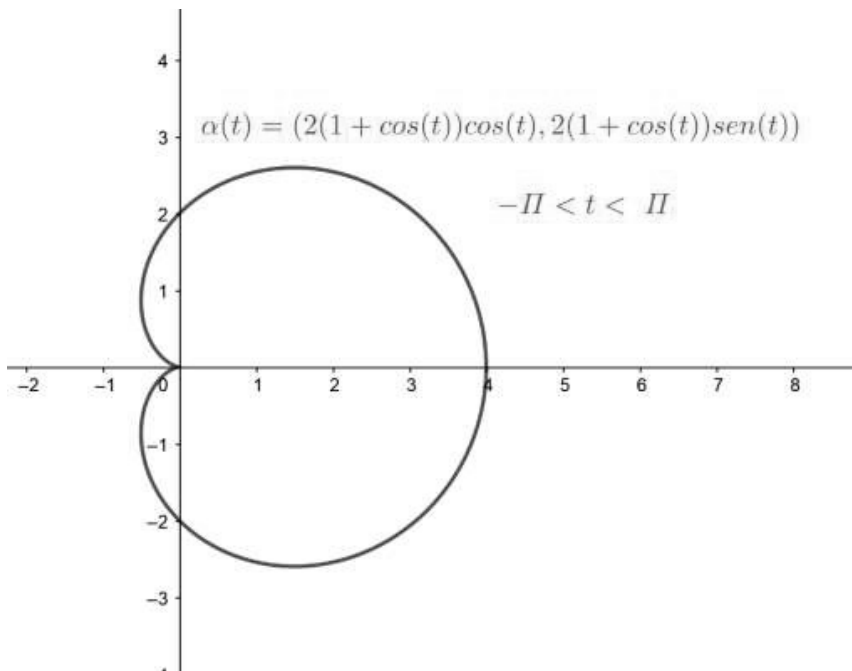
α es cóncava en $\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$

α es convexa en $\left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right)$

α es cóncava en $\left(0, \frac{2\pi}{3}\right)$

α es convexa en $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$

Podemos ahora ya, con todo lo anterior, hacer un esbozo de la traza de la curva α .



4.4 Cicloide

Se define la **cicloide** como la trayectoria de un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta.

La parametrización viene descrita por la siguiente correspondencia:

Dado $r > 0$ (el radio de nuestra circunferencia), definimos la correspondencia:

$$\begin{aligned}\alpha: (0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\rightarrow \alpha(t) = (r(t - \text{sen}(t)), r(1 - \cos(t)))\end{aligned}$$

Sin duda α es una función que queda bien definida. Las aplicaciones:

$$\begin{aligned}\alpha_1(t) &= r(t - \text{sen}(t)), & \forall t \in (0, 2\pi) \\ \alpha_2(t) &= r(1 - \cos(t)), & \forall t \in (0, 2\pi)\end{aligned}$$

Son funciones derivables en $(0, 2\pi)$, y:

$$\begin{aligned}\forall t \in (0, 2\pi), & \quad \alpha'_1(t) = r(1 - \cos(t)) \\ \forall t \in (0, 2\pi), & \quad \alpha'_2(t) = r \text{sen}(t)\end{aligned}$$

que son ambas, por álgebra de funciones continuas, dos funciones continuas en $(0, 2\pi)$.

De otro lado: $\forall t \in (0, 2\pi), \cos(t) < 1 \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), 1 - \cos(t) > 0$

Entonces: $\forall t \in (0, 2\pi), r(1 - \cos(t)) > 0 \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), \alpha'_1(t) > 0$.

Por tanto: $(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0, 0), \forall t \in (0, 2\pi)$.

Y en consecuencia, según todo lo anterior, es α una curva regular plana.

Siendo, además $\alpha'_1(t) > 0, \forall t \in (0, 2\pi)$, ocurre que α_1 es una función estrictamente creciente en $(0, 2\pi)$.

Intentemos estudiar ahora las regiones del plano por donde se encuentra la traza de α .

Recordemos en principio, que sabemos por un resultado de trigonometría, que:

$$\forall t \in (0, \pi), \quad 0 \leq \text{sen}(t) \leq t \Rightarrow \forall t \in (0, \pi), \quad t - \text{sen}(t) \geq 0$$

Este hecho, unido a que la función α_1 es una función estrictamente creciente en $(0, 2\pi)$, hacen que ocurra lo siguiente:

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < t < \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

De un lado:

$$t - \text{sen}(t) \geq 0$$

Y de otro:

$$\alpha_1(t) < \alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

i.e.,

$$0 \leq r(t - \text{sen}(t)) < r\left(\frac{\pi}{2} - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Luego:

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha_1(t) \in \left[0, r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right]$$

Y para $\alpha_2(t)$ tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow 0 \leq \cos(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -\cos(t) \geq -1 \Rightarrow 1 \geq 1 - \cos(t) \geq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 \leq r(1 - \cos(t)) \leq r \Rightarrow 0 \leq \alpha_2(t) \leq r \Rightarrow \alpha_2(t) \in [0, r] \end{aligned}$$

Así pues, si:

$$t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in \left[0, r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] \times [0, r]$$

i.e.,

$$\text{Si } t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha(t) \in \left[0, r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\right] \times [0, r]$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &\Rightarrow \frac{\pi}{2} < t < \pi \Rightarrow \alpha_1\left(\frac{\pi}{2}\right) < \alpha_1(t) < \alpha_1(\pi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) < \alpha_1(t) < r(\pi - 0) \Rightarrow \alpha_1(t) \in \left[r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), r\pi\right] \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) &\Rightarrow -1 \leq \cos(t) \leq 0 \Rightarrow 1 \geq -\cos(t) \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 1 - \cos(t) \geq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \leq r(1 - \cos(t)) \leq 2r \Rightarrow r \leq \alpha_2(t) \leq 2r \Rightarrow \alpha_2(t) \in [r, 2r] \end{aligned}$$

Así pues:

$$\text{Si } t \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in \left[r\left(\frac{\pi}{2} - 1\right), r\pi\right] \times [r, 2r]$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow \pi < t < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha_1(\pi) \leq \alpha_1(t) \leq \alpha_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow r(\pi - 0) \leq \alpha_1(t) \leq r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) \Rightarrow \alpha_1(t) \in \left[r\pi, r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)\right] \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow -1 \leq \cos(t) \leq 0 \Rightarrow 1 \geq -\cos(t) \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 1 - \cos(t) \geq 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow r \leq r(1 - \cos(t)) \leq 2r \Rightarrow r \leq \alpha_2(t) \leq 2r \Rightarrow \alpha_2(t) \in [r, 2r] \end{aligned}$$

i.e:

$$\text{Si } t \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in \left[r\pi, r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right)\right] \times [r, 2r]$$

Por último, para ver lo que ocurre en $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, observemos lo siguiente:

Si notamos por f a la función:

$$\begin{aligned} f: \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t &\rightarrow f(t) = r(t - \operatorname{sen}(t)) \end{aligned}$$

Tendremos lo siguiente:

$$\begin{aligned} f &\text{ es una función continua en } \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right] \\ f &\text{ es una función diferenciable en } \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \\ \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad f'(t) &= r(1 - \cos(t)) > 0 \end{aligned}$$

En virtud entonces de una consecuencia del Teorema del Valor Medio de Lagrange, será f una función estrictamente creciente en $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Entonces:

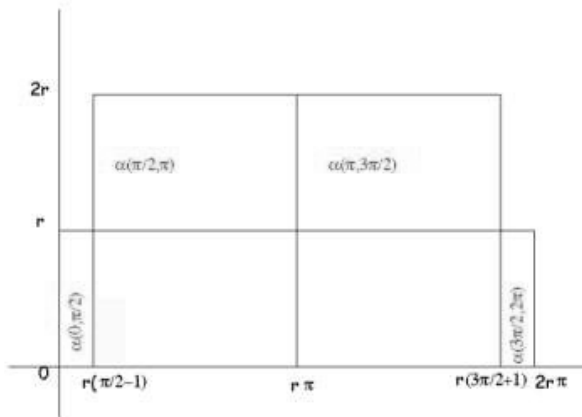
$$\begin{aligned} \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad f\left(\frac{3\pi}{2}\right) &\leq f(t) \leq f(2\pi) \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) &\leq f(t) \leq 2r\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right) &\leq f(t) = \alpha_1(t) \leq 2r\pi \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \alpha_1(t) &\in \left[r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right), 2r\pi\right] \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow 0 \leq \cos(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \geq -\cos(t) \geq -1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos(t) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq r(1 - \cos(t)) \leq r \Rightarrow \alpha_2(t) \in [0, r] \end{aligned}$$

Así pues:

$$\forall t \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in \left[r\left(\frac{3\pi}{2} + 1\right), 2r\pi\right] \times [0, r]$$



Observemos ahora lo siguiente:
Ya sabemos que:

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, \pi), 0 < \sin(t) < t \\ \Rightarrow \forall t \in (0, \pi), \\ t - \sin(t) > 0 \Rightarrow \\ \forall t \in (0, \pi), r(t - \sin(t)) > 0 \\ \text{i.e.,} \\ \forall t \in (0, \pi), \quad \alpha_1(t) > 0 \end{aligned}$$

Pero si:

$$\begin{aligned} t \in [\pi, 2\pi] \Rightarrow t \geq \pi > 1 \geq \sin(t) \\ \Rightarrow t - \sin(t) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in [\pi, 2\pi], \quad r(t - \sin(t)) > 0 \Rightarrow \forall t \in [\pi, 2\pi], \quad \alpha_1(t) > 0 \end{aligned}$$

Tenemos así, que:

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha_1(t) > 0$$

Y por tanto la traza de la curva α no corta al eje OY .

También sabemos:

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, 2\pi), \quad \cos(t) < 1 \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), \quad 1 - \cos(t) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), \quad r(1 - \cos(t)) > 0 \Rightarrow \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha_2(t) > 0 \end{aligned}$$

En consecuencia la traza de α tampoco corta al eje OX .

Para estudiar su crecimiento, observemos lo siguiente:

$$\forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_1(t) = r(1 - \cos(t)) > 0$$

Y

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_2(t) &= r \sin(t) \\ \alpha'_2(t) = 0 &\Leftrightarrow \sin(t) = 0 \Leftrightarrow t = \pi \end{aligned}$$

Para estudiar el signo de la función: $\alpha'_2(t) \alpha'_1(t)$ basta con hacer la siguiente tabla:

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
$\alpha'_1(t)$	+	+
$\alpha'_2(t)$	+	-
$\alpha'_2(t) \alpha'_1(t)$	+	-

En virtud entonces de un resultado de teoría, tenemos:

α es estrictamente creciente en $(0, \pi)$
 α es estrictamente decreciente en $(\pi, 2\pi)$

Además: $\alpha'_2(\pi) = 0$.

Entonces, como α'_2 vuelve a ser diferenciable en $(0, 2\pi)$

y $\forall t \in (0, 2\pi)$, $\alpha''_2(t) = r \cos(t)$. Tendremos:

$\alpha'_2(\pi) = 0$ y $\alpha''_2(\pi) = r \cos(\pi) = -r < 0$.

Por tanto α alcanza en $t_0 = \pi$ un máximo relativo. Y desde luego para $t_0 = \pi$, la tangente a la curva en este punto, es horizontal.

Para estudiar, por último las posibles regiones de concavidad ó convexidad de la curva, démonos cuenta de lo siguiente:

Tanto $\alpha'_1(t) = r(1 - \cos(t))$, $\forall t \in (0, 2\pi)$ como $\alpha'_2(t) = r \sin(t)$, $\forall t \in (0, 2\pi)$

son funciones diferenciables en $(0, 2\pi)$, y:

$$\alpha''_1(t) = r \sin(t), \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

$$\alpha''_2(t) = r \cos(t), \quad \forall t \in (0, 2\pi)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha'_1(t) \alpha'_2(t) - \alpha''_1(t) \alpha'_2(t) &= r(1 - \cos(t))r \cos(t) - r \sin(t) r \sin(t) = \\ &= (r - r \cos(t))r \cos(t) - r^2 \sin^2(t) = r^2 \cos(t) - r^2 \cos^2(t) - r^2 \sin^2(t) = \\ &= r^2 \cos(t) - r^2(\cos^2(t) + \sin^2(t)) = r^2 \cos(t) - r^2 = r^2(\cos(t) - 1) \end{aligned}$$

Para el signo de la función:

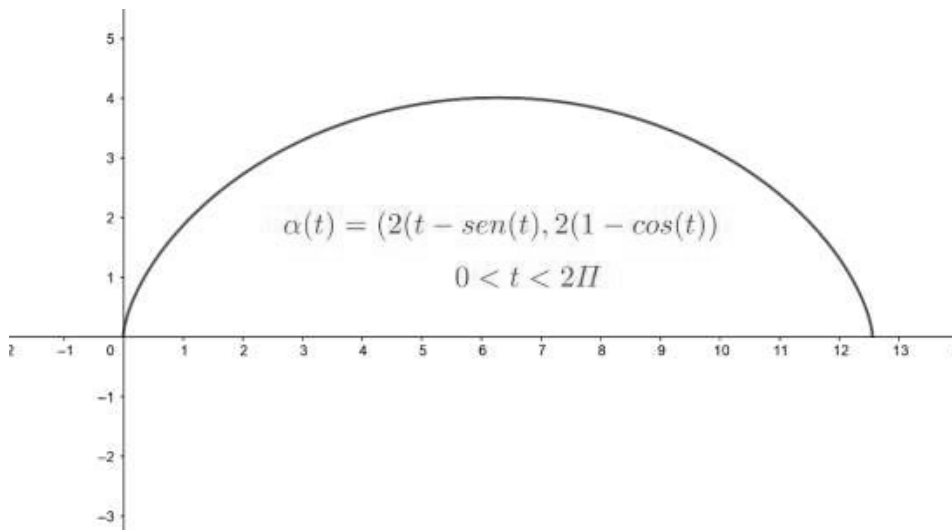
$$\frac{\alpha'_1(t) \alpha'_2(t) - \alpha''_1(t) \alpha'_2(t)}{(\alpha'_1(t))^3}$$

Tendremos entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha'_1(t) \alpha'_2(t) - \alpha''_1(t) \alpha'_2(t)}{(\alpha'_1(t))^3} &= \frac{r^2(\cos(t) - 1)}{r^3(1 - \cos(t))^3} = \frac{-r^2(1 - \cos(t))}{r^3(1 - \cos(t))^3} = \\ &= \frac{-1}{r(1 - \cos(t))^2} < 0, \quad \forall t \in (0, 2\pi) \end{aligned}$$

Y en virtud entonces de un resultado anterior, concretamente de 3.22, tendremos que α es cóncava en $(0, 2\pi)$.

Un esbozo de nuestra curva para $r = 2$, queda de la siguiente manera:



4.5 Cisoide de Diocles

La siguiente representación, corresponde a una de las ramas de una curva que fue estudiada por el matemático griego **Diocles** (s. III a.C.), con el fin de resolver el problema clásico de la duplicación del cubo. Realmente se considera la **Cisoide de Diocles** como el subconjunto de puntos del plano que correspondería a tomar dos curvas regulares planas, para nosotros, una con dominio el intervalo abierto $(0, +\infty)$, y otra con dominio el intervalo abierto $(-\infty, 0)$. Vamos a representar nosotros la rama correspondiente al dominio $(0, +\infty)$.

Tomemos $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y vamos a considerar la siguiente correspondencia:

$$\alpha: (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \left(\frac{a}{t^2 + 1}, \frac{a}{t(t^2 + 1)} \right)$$

Es, sin duda, α una aplicación que queda bien definida. Además:

Por álgebra de funciones continuas:

$$\alpha_1(t) = \frac{a}{t^2 + 1}, \quad \forall t \in (0, +\infty) \text{ es continua en } (0, +\infty)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{a}{t(t^2 + 1)}, \quad \forall t \in (0, +\infty) \text{ es continua en } (0, +\infty)$$

Por álgebra de derivadas, son ambas funciones derivables en $(0, +\infty)$, y:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_1(t) = \frac{-2at}{(t^2 + 1)^2}$$

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_2(t) = \frac{-a(3t^2 + 1)}{t^2(t^2 + 1)^2}$$

Y, $\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)$ vuelven a ser, por álgebra de funciones continuas, dos funciones continuas en $(0, +\infty)$.

Así pues, $\alpha_1, \alpha_2 \in C^1(0, +\infty)$

De otro lado:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad -2at < 0 \Rightarrow \forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_1(t) = \frac{-2at}{(t^2 + 1)^2} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_1(t) \neq 0 \Rightarrow \forall t \in (0, +\infty), \quad (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0, 0)$$

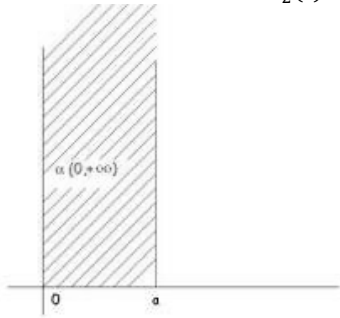
Según todo lo anterior, será α , en efecto, una curva regular plana.

Observemos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (0, +\infty) &\Rightarrow t^2 > 0 \Rightarrow t^2 + 1 > 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{t^2 + 1} < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < \frac{a}{t^2 + 1} < a \Rightarrow 0 < \alpha_1(t) < a \Rightarrow \alpha_1(t) \in (0, a) \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (0, +\infty) &\Rightarrow t^2 > 0 \Rightarrow t^2 + 1 > 1 \Rightarrow t(t^2 + 1) > t \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < \frac{1}{t(t^2 + 1)} < \frac{1}{t} \Rightarrow 0 < \frac{a}{t(t^2 + 1)} < \frac{a}{t} \Rightarrow \frac{a}{t(t^2 + 1)} > 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_2(t) > 0 \Rightarrow \alpha_2(t) \in (0, +\infty) \end{aligned}$$



Tenemos con esto:

$\forall t \in (0, +\infty),$
 $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in (0, a) \times (0, +\infty)$
 Más aún, a la vista de lo anterior, démonos cuenta de que ocurre:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_2(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{t(t^2 + 1)} = +\infty$$

Mientras que:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{a}{t^2 + 1} = a$$

La interpretación de este hecho, es la siguiente:

Hemos visto, como $\alpha'_1(t) \neq 0, \forall t \in (0, +\infty)$. Sabemos entonces desde un resultado anterior, que la traza de α es el grafo de la función f de clase 1, definida en la forma: $f = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$. Realmente, lo que hemos visto es que $\alpha'_1(t) < 0, \forall t \in (0, +\infty)$. Por tanto será la función α_1 una función estrictamente decreciente en $(0, +\infty)$. Como además es:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \alpha_1(t) = a$$

ocurre lo siguiente:

Tomamos $\varepsilon > 0$ y consideramos $\alpha_1(\varepsilon)$. Debe pasar, sin duda que:

$\alpha_1(\varepsilon) < a$. Entonces, si tomamos: $\delta = a - \alpha_1(\varepsilon) > 0$, ocurre:

$$\begin{aligned} \forall x \in (0, a), \quad |x - a| < \delta &= a - \alpha_1(\varepsilon) \Rightarrow a - x < a - \alpha_1(\varepsilon) \Rightarrow -x < -\alpha_1(\varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow x > \alpha_1(\varepsilon) \Rightarrow 0 < \alpha_1^{-1}(x) < \varepsilon \end{aligned}$$

i.e., ocurre, que:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in (0, a), \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |\alpha_1^{-1}(x)| < \varepsilon$$

Y por tanto, ocurre, que:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \alpha_1^{-1}(x) = 0$$

Ahora, por los resultados relativos a límites de una composición de funciones, tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \alpha_1^{-1}(x) &= 0 \\ \alpha_1^{-1}(x) &> 0, \quad \forall x \in (0, a) \\ \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_2(t) &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} (\alpha_2 \circ \alpha_1^{-1})(x) = +\infty$$

i.e. la recta $x = a$ es una asíntota vertical para la función f . Y como la traza de la curva α , coincide con el grafo de la función f , será por tanto, la recta $x = a$ una asíntota vertical para la traza de nuestra curva α .

Para averiguar si la traza de α corta a los ejes coordenados, observemos lo siguiente:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha_1(t) = \frac{a}{t^2 + 1} > 0 \Rightarrow \forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha_1(t) \neq 0$$

Luego, la traza de α no corta al eje OY .

Y también:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha_2(t) = \frac{a}{t(t^2 + 1)} > 0 \Rightarrow \forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha_2(t) \neq 0$$

Luego, la traza de α no corta al eje OX

Para estudiar ahora su crecimiento, tendremos:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_1(t) = \frac{-2at}{(t^2 + 1)^2} < 0$$

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_2(t) = \frac{-a(3t^2 + 1)}{t^2(t^2 + 1)^2} < 0$$

Por lo que ocurrirá, que:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha'_2(t) \cdot \alpha'_1(t) > 0$$

Y en consecuencia será α una curva estrictamente creciente en $(0, +\infty)$.

Más aún, no hay ningún punto en la traza de α con tangente horizontal, pues:

$\alpha'_2(t) \neq 0$, $\forall t \in (0, +\infty)$, y tampoco hay ningún punto en la traza de α con tangente vertical, pues: $\alpha'_1(t) \neq 0$, $\forall t \in (0, +\infty)$.

Por último ocurre que las funciones:

$$\alpha'_1(t) = \frac{-2at}{(t^2 + 1)^2}, \quad \forall t \in (0, +\infty)$$

$$\alpha'_2(t) = \frac{-a(3t^2 + 1)}{t^2(t^2 + 1)^2}, \quad \forall t \in (0, +\infty)$$

Son ambas diferenciables en $(0, +\infty)$, por álgebra de derivadas, y

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha''_1(t) &= \frac{-2a(t^2 + 1)^2 + 2at2(t^2 + 1)2t}{(t^2 + 1)^4} = \\ &= \frac{-2a(t^2 + 1) + 8at^2}{(t^2 + 1)^3} = \frac{6at^2 - 2a}{(t^2 + 1)^3} = \frac{2a(3t^2 - 1)}{(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha''_2(t) &= \frac{-6att^2(t^2 + 1)^2 + a(3t^2 + 1)[2t(t^2 + 1)^2 + t^22(t^2 + 1)2t]}{t^4(t^2 + 1)^4} \\ &= \frac{-6at^2(t^2 + 1) + a(3t^2 + 1)[2(t^2 + 1) + 4t^2]}{t^3(t^2 + 1)^3} = \frac{-6at^2(t^2 + 1) + a(3t^2 + 1)(6t^2 + 2)}{t^3(t^2 + 1)^3} \\ &= \frac{-6at^4 - 6at^2 + 2a(3t^2 + 1)^2}{t^3(t^2 + 1)^3} = \frac{-6at^4 - 6at^2 + 2a(9t^4 + 6t^2 + 1)}{t^3(t^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{-6at^4 - 6at^2 + 18at^4 + 12at^2 + 2a}{t^3(t^2 + 1)^3} = \frac{12at^4 + 6at^2 + 2a}{t^3(t^2 + 1)^3} = \\ &= \frac{2a(6t^4 + 3t^2 + 1)}{t^3(t^2 + 1)^3} \end{aligned}$$

Y para estas expresiones de nuestras funciones, ocurre, que $\forall t \in (0, +\infty)$,

$$\begin{aligned} & \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_1''(t) \alpha_2'(t) = \\ &= \frac{-2at}{(t^2+1)^2} \frac{2a(6t^4+3t^2+1)}{t^3(t^2+1)^3} + \frac{2a(3t^2-1)}{(t^2+1)^3} \frac{a(3t^2+1)}{t^2(t^2+1)^2} = \\ &= \frac{-4a^2(6t^4+3t^2+1)}{t^2(t^2+1)^5} + \frac{2a^2(9t^4-1)}{t^2(t^2+1)^5} = \\ &= \frac{-24a^2t^4 - 12a^2t^2 - 4a^2 + 18a^2t^4 - 2a^2}{t^2(t^2+1)^5} = \frac{-6a^2t^4 - 12a^2t^2 - 6a^2}{t^2(t^2+1)^5} = \\ &= \frac{-6a^2(t^4+2t^2+1)}{t^2(t^2+1)^5} = \frac{-6a^2(t^2+1)^2}{t^2(t^2+1)^5} = \frac{-6a^2}{t^2(t^2+1)^3} \end{aligned}$$

i.e.,

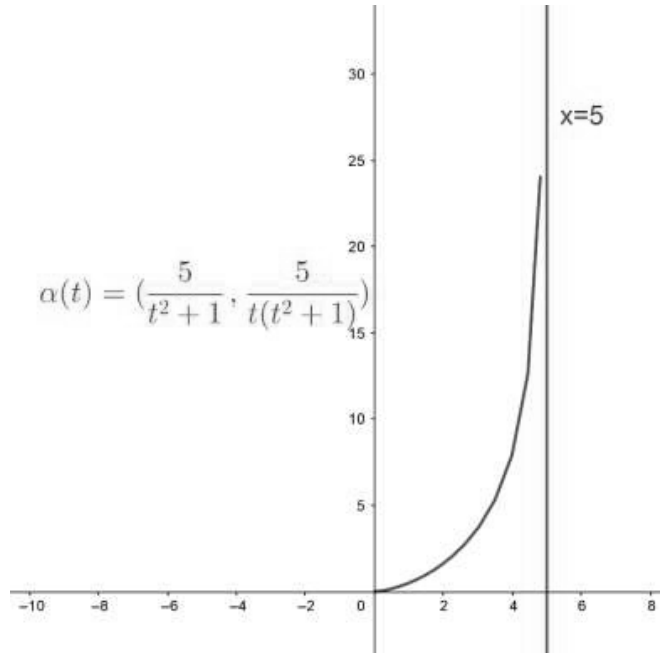
$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) = \frac{-6a^2}{t^2(t^2+1)^3}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \forall t \in (0, +\infty), \quad & \frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3} = \frac{\frac{-6a^2}{t^2(t^2+1)^3}}{\frac{(-2at)^3}{(t^2+1)^6}} = \\ &= \frac{-6a^2(t^2+1)^6}{(-2at)^3 t^2(t^2+1)^3} = \frac{-6a^2(t^2+1)^3}{-8a^3 t^5} = \frac{3(t^2+1)^3}{4at^5} > 0 \end{aligned}$$

En las condiciones anteriores, asegura el resultado 3.22, que la curva α es una curva convexa en $(0, +\infty)$.

Estamos ya, en condiciones de hacer un esbozo de nuestra curva.



4.6 Folium de Descartes

Otra curva clásica, de la que vamos a estudiar nosotros sólo una rama, la correspondiente al dominio $(-1, +\infty)$, es la curva llamada **folium de Descartes**. Debe su nombre al célebre matemático, quien la estudió por primera vez en 1638.

Tomemos $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y definimos la correspondencia:

$$\alpha: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \rightarrow \alpha(t) = \left(\frac{3at}{1+t^3}, \frac{3at^2}{1+t^3} \right)$$

En principio, observemos que α , es una función que queda bien definida en nuestro dominio. Si notamos ahora:

$$\alpha_1(t) = \frac{3at}{1+t^3}, \quad \forall t \in (-1, +\infty)$$

$$\alpha_2(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}, \quad \forall t \in (-1, +\infty)$$

Ocurre lo siguiente:

Por álgebra de derivadas, tanto α_1 como α_2 son funciones derivables en $(-1, +\infty)$, y $\forall t \in (-1, +\infty)$, se tiene:

$$\alpha'_1(t) = \frac{3a(1+t^3) - 3at \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1+t^3 - 3t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\alpha'_2(t) = \frac{6at(1+t^3) - 3at^2 \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2+2t^3-3t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Y además, en $(-1, +\infty)$, son α'_1 y α'_2 , por álgebra de funciones continuas, dos funciones continuas.

Así pues: $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathcal{C}^1(-1, +\infty)$

También:

$$\alpha'_2(t) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} = 0 \Leftrightarrow 3at(2-t^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ó} \\ t^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ó} \\ t = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Ahora bien:

$$\alpha'_1(0) = \frac{3a}{1} = 3a \neq 0$$

$$\alpha'_1(\sqrt[3]{2}) = \frac{3a(1-4)}{(1+2)^2} = \frac{-9a}{9} = -a \neq 0$$

Por tanto: $(\alpha'_1(t), \alpha'_2(t)) \neq (0,0), \quad \forall t \in (-1, +\infty)$

Es, según todo lo anterior, α una curva regular plana.

Observemos ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (-1,0) &\Rightarrow -1 < t < 0 \Rightarrow \begin{cases} -3a < 3at < 0 \\ 1 > -t > t^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a < 3at < 0 \\ -1 < t < -t^2 < t^3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} -3a < 3at < 0 \\ 0 < 1+t < 1-t^2 < 1+t^3 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a < 3at < 0 \\ 1 < \frac{1}{1+t^3} \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-3a}{1+t^3} < \frac{3at}{1+t^3} < 0 \Rightarrow \alpha_1(t) < 0 \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (-1, +\infty) \Rightarrow -1 < t < 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 > -t > t^2 > 0 \\ 1 < \frac{1}{1+t^3} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 3a > -3at > 3at^2 > 0 \\ 1 < \frac{1}{1+t^3} \end{cases} \Rightarrow \frac{3a}{1+t^3} > \frac{3at^2}{1+t^3} > 0 \Rightarrow \alpha_2(t) > 0 \end{aligned}$$

Luego, si $t \in (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) < 0 \\ \alpha_2(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in (-\infty, 0) \times (0, +\infty)$

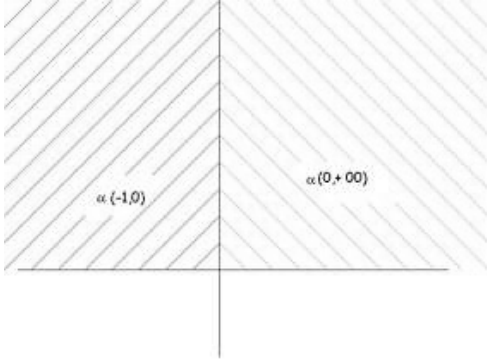
Ahora:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (0, +\infty) \Rightarrow t > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ t^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ 1+t^3 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ 0 < \frac{1}{1+t^3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < \frac{3at}{1+t^3} < 3at \Rightarrow \alpha_1(t) > 0 \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } t \in (0, +\infty) \Rightarrow t > 0 \Rightarrow \begin{cases} t^2 > 0 \\ t^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at^2 > 0 \\ 1+t^3 > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at^2 > 0 \\ 0 < \frac{1}{1+t^3} < 1 \end{cases} \Rightarrow \\ 0 < \frac{3at^2}{1+t^3} < 3at^2 \Rightarrow \alpha_2(t) > 0 \end{aligned}$$

Luego, si $t \in (0, +\infty) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1(t) > 0 \\ \alpha_2(t) > 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$



Podríamos, en realidad, afinar algo más en las acotaciones en el intervalo $(0, +\infty)$, si recordamos algunos razonamientos, relativos a la continuidad.

Observemos en principio que ocurre, que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_j(t) &= 0, \quad \forall j = 1, 2 \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_j(t) &= 0, \quad \forall j = 1, 2 \end{aligned}$$

Entonces, si tomamos:

$$\varepsilon = \alpha_j(1) > 0 \quad \left(\alpha_1(1) = \frac{3a}{2} = \alpha_2(1) \right),$$

ocurre:

De un lado:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \alpha_j(t) &= 0 \Rightarrow \\ \exists \delta_j > 0, \quad (0 < \delta_j < 1), \quad \forall t \in (0, +\infty), \quad 0 < t < \delta_j, \quad \alpha_j(t) < \alpha_j(1) = \varepsilon \end{aligned}$$

Y si tomamos: $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, tenemos:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad 0 < t < \delta, \quad \alpha_j(t) < \alpha_j(1) = \varepsilon$$

De otro lado:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha_j(t) &= 0 \Rightarrow \\ \exists H_j > 1, \quad \forall t \in (0, +\infty), \quad t > H_j, \quad \alpha_j(t) < \alpha_j(1) = \varepsilon \end{aligned}$$

Y si tomamos: $H = \max\{H_1, H_2\} > 1$, tenemos:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad t > H, \quad \alpha_j(t) < \alpha_j(1) = \varepsilon$$

Por último las funciones:

$$\alpha_j: [\delta, H] \subseteq (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \rightarrow \alpha_j(t)$$

son funciones continuas en el intervalo cerrado $[\delta, H]$, entonces en virtud del resultado de Weierstrass, alcanzarán un máximo absoluto en $[\delta, H]$, i.e.,

$$\exists t_0^j \in [\delta, H], \quad \forall t \in [\delta, H], \quad \alpha_j(t) \leq \alpha_j(t_0^j)$$

En particular:

$$1 \in [\delta, H] \Rightarrow \alpha_j(1) \leq \alpha_j(t_0^j)$$

Tenemos así:

$$\forall t \in (0, \delta), \quad \alpha_j(t) < \alpha_j(1) \leq \alpha_j(t_0^j)$$

$$\forall t \in [\delta, H], \quad \alpha_j(t) \leq \alpha_j(t_0^j)$$

$$\forall t \in (H, +\infty), \quad \alpha_j(t) < \alpha_j(1) \leq \alpha_j(t_0^j)$$

Luego:

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad 0 \leq \alpha_j(t) \leq \alpha_j(t_0^j)$$

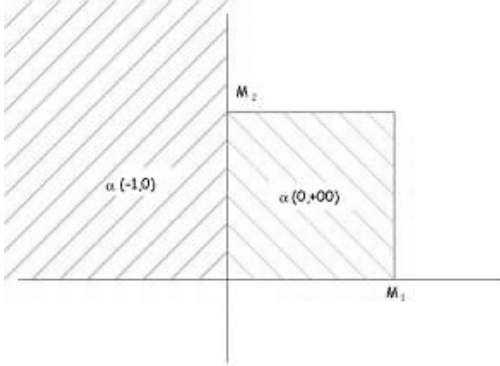
Si notamos por:

$$M_1 = \alpha_1(t_0^1) \quad y \quad M_2 = \alpha_2(t_0^2)$$

Tendremos: $\alpha_1(t) \in [0, M_1]$ y $\alpha_2(t) \in [0, M_2]$ $\forall t \in (0, +\infty)$

i.e.,

$$\forall t \in (0, +\infty), \quad \alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t)) \in [0, M_1] \times [0, M_2]$$



Podríamos también determinar exactamente quienes son los números reales: M_1 y M_2 y los valores para los que se alcanzan estos máximos, pero esto lo vamos a dejar para cuando estudiemos el crecimiento de la curva α .

Para estudiar si la traza de α corta a los ejes, vamos a observar lo siguiente:

$$\alpha_1(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3at}{1+t^3} = 0 \Leftrightarrow 3at = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0$$

La traza de α corta al eje OY en el punto

$\alpha(0)$, i.e., en $\alpha(0) = (0,0)$

$$\alpha_2(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3at^2}{1+t^3} = 0 \Leftrightarrow 3at^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

Corta la traza de α al eje OX también en el punto $\alpha(0) = (0,0)$

Para estudiar su crecimiento, recordemos que:

$$\forall t \in (-1, +\infty), \quad \alpha_1'(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$\forall t \in (-1, +\infty), \quad \alpha_2'(t) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

Ahora:

$$\begin{aligned}\alpha_1'(t) = 0 &\Leftrightarrow \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = 0 \Leftrightarrow 3a(1-2t^3) = 0 \Leftrightarrow 1-2t^3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^3 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

Y ocurre:

$$\begin{aligned}\text{Si } t \in (-1, 0), \quad t^3 < 0 \Rightarrow -2t^3 > 0 \Rightarrow 1-2t^3 > 0 \Rightarrow 3a(1-2t^3) > 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} > 0 \Rightarrow \alpha_1'(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si } t \in \left(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right), \quad 0 < t < \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \Rightarrow 0 < t^3 < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < 2t^3 < 1 \Rightarrow -1 < -2t^3 < 0 \\ \Rightarrow 0 < 1-2t^3 < 1 \Rightarrow 3a(1-2t^3) > 0 \Rightarrow \alpha_1'(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} > 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Y si } t \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right), \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < t \Rightarrow \frac{1}{2} < t^3 \Rightarrow 1 < 2t^3 \Rightarrow 1-2t^3 < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3a(1-2t^3) < 0 \Rightarrow \alpha_1'(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} < 0\end{aligned}$$

El signo de la función α_1' en su dominio, queda pues como muestra la siguiente tabla:

	$\left(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$
$\alpha_1'(t)$	+	-

Démonos cuenta además, de que α_1' es una función diferenciable en $(-1, +\infty)$ y de que:
 $\forall t \in (-1, +\infty)$,

$$\begin{aligned}\alpha_1''(t) &= \frac{3a(-6t^2)(1+t^3)^2 - 3a(1-2t^3)2(1+t^3)3t^2}{(1+t^3)^4} = \\ &= \frac{-18at^2(1+t^3) - 18at^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} = \frac{-18at^2(1+t^3+1-2t^3)}{(1+t^3)^3} = \\ &= \frac{-18at^2(2-t^3)}{(1+t^3)^3}\end{aligned}$$

En particular, tendremos, que:

$$\alpha_1''\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{-18a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(2-\frac{1}{2}\right)}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{-18a\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)\frac{3}{2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^3} < 0$$

Según un resultado conocido sobre diferenciabilidad, tendremos que:

$$\alpha_1 \text{ alcanza un máximo relativo para } t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Que realmente es un máximo absoluto para nuestra función, dado que es, según una consecuencia del Teorema del Valor Medio, y a la vista del signo de su función derivada:

$$\alpha_1 \text{ estrictamente creciente en } \left(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$$

$$\alpha_1 \text{ estrictamente decreciente en } \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty\right)$$

El valor de tal máximo alcanzado por α_1 en $t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, será:

$$\alpha_1\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3a \frac{1}{\sqrt[3]{2}}}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^3} = \frac{\frac{3a}{\sqrt[3]{2}}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3a}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \frac{3a}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2a}{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}}} = 2^{\frac{2}{3}} a = a^{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{4}$$

Veamos que ocurre con el crecimiento para la función α_2 :

$$\alpha_2'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} = 0 \Leftrightarrow 3at(2-t^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ó} \\ 2-t^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ó} \\ t^3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ó} \\ t = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Ahora:

$$\text{Si } t \in (-1, 0) \Rightarrow \begin{cases} -1 < t < 0 \\ -1 < t^3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3a < 3at < 0 \\ 1 > -t^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at < 0 \\ 2-t^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3at(2-t^3) < 0 \Rightarrow \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} < 0 \Rightarrow \alpha_2'(t) = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} < 0$$

$$\text{Si } t \in (0, \sqrt[3]{2}) \Rightarrow \begin{cases} 0 < t < \sqrt[3]{2} \\ 0 < t^3 < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ 0 > -t^3 > -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ 2-t^3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3at(2-t^3) > 0 \Rightarrow \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} > 0 \Rightarrow \alpha_2'(t) > 0$$

$$\text{Y si } t \in (\sqrt[3]{2}, +\infty) \Rightarrow 0 < \sqrt[3]{2} < t \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ 2 < t^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3at > 0 \\ 2-t^3 < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3at(2-t^3) < 0 \Rightarrow \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} < 0 \Rightarrow \alpha_2'(t) < 0$$

El signo de la función α_2' quedará por tanto:

	$(-1, 0)$	$(0, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
$\alpha_2'(t)$	-	+	-

Como además α_2' es una función diferenciable en $(-1, +\infty)$, y $\forall t \in (-1, +\infty)$,

$$\begin{aligned} \alpha_2''(t) &= \frac{(6a - 12at^3)(1+t^3)^2 - (6at - 3at^4)2(1+t^3)3t^2}{(1+t^3)^4} \\ &= \frac{(6a - 12at^3)(1+t^3) - 6t^2(6at - 3at^4)}{(1+t^3)^3} = \\ &= \frac{6a + 6at^3 - 12at^3 - 12at^6 - 36at^3 + 18at^6}{(1+t^3)^3} = \frac{6at^6 - 42at^3 + 6a}{(1+t^3)^3} = \frac{6a(t^6 - 7t^3 + 1)}{(1+t^3)^3} \end{aligned}$$

Ocurre entonces:

$$\alpha_2''(0) = \frac{6a}{1} > 0$$

$$\alpha_2''(\sqrt[3]{2}) = \frac{6a(4 - 14 + 1)}{(1 + 2)^3} = \frac{-54a}{27} = -2a < 0$$

Luego según conocemos de resultados relativos a la diferenciabilidad, tendremos:

α_2 alcanza en $t_1 = 0$ un mínimo relativo

α_2 alcanza en $t_2 = \sqrt[3]{2}$ un máximo relativo

La función para estos valores del parámetro, valdrá:

$$\alpha_2(0) = \frac{0}{1} = 0$$

$$\alpha_2(\sqrt[3]{2}) = \frac{3a\sqrt[3]{4}}{1 + 2} = a\sqrt[3]{4}$$

En resumen, de todo lo hecho para estudiar el crecimiento de α , hacemos la siguiente tabla:

	$(-1, 0)$	$(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
$\alpha_1'(t)$	+	+	-	-
$\alpha_2'(t)$	-	+	+	-
$\alpha_1'(t) \cdot \alpha_2'(t)$	-	+	-	+

Por un resultado anterior, tenemos:

α es estrictamente decreciente en $(-1, 0)$

α es estrictamente creciente en $(0, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$

α es estrictamente decreciente en $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2})$

α es estrictamente creciente en $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$

En $t_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, la curva α tiene un vector tangente vertical, pues:

$$\alpha_1'(t_0) = \alpha_1'\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = 0$$

Y corresponde al punto de la traza:

$$\alpha(t_0) = \alpha\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \left(\frac{\frac{3a}{\sqrt[3]{2}}}{1 + \frac{1}{2}}, \frac{\frac{3a}{\sqrt[3]{4}}}{1 + \frac{1}{2}}\right) = \left(\frac{\frac{3a}{\sqrt[3]{2}}}{\frac{3}{2}}, \frac{\frac{3a}{\sqrt[3]{4}}}{\frac{3}{2}}\right) = \left(\frac{2a}{\sqrt[3]{2}}, \frac{2a}{\sqrt[3]{4}}\right) = (a\sqrt[3]{4}, a\sqrt[3]{2})$$

En $t_1 = 0$ y en $t_2 = \sqrt[3]{2}$ la curva α tiene tangentes horizontales, pues:

$$\alpha_2'(t_1) = \alpha_2'(0) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_2'(t_2) = \alpha_2'(\sqrt[3]{2}) = 0$$

En $t_1 = 0$, la curva α alcanza un mínimo relativo, concretamente en el punto de la traza:

$$\alpha(0) = (\alpha_1(0), \alpha_2(0)) = (0, 0)$$

En $t_2 = \sqrt[3]{2}$, la curva α alcanza un máximo relativo, en el punto de la traza

$$\alpha(t_2) = \alpha(\sqrt[3]{2}) = \left(\frac{3a\sqrt[3]{2}}{1 + 2}, \frac{3a\sqrt[3]{4}}{1 + 2}\right) = (a\sqrt[3]{2}, a\sqrt[3]{4})$$

Vamos a seguir ahora, estudiando sus regiones de concavidad o convexidad.

Puesto que α_1 y α_2 son funciones dos veces diferenciables en $(-1, +\infty)$, y además

$\alpha_1'(t) \neq 0, \forall t \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, podemos estudiar en el conjunto

$(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$ el signo del cociente:

$$\frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_1''(t) \alpha_2'(t)}{(\alpha_1'(t))^3}$$

Si $t \in (-1, +\infty)$, $t \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, ocurre:

$$\begin{aligned} & \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_1''(t) \alpha_2'(t) = \\ &= \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \frac{6a(t^6-7t^3+1)}{(1+t^3)^3} + \frac{18at^2(2-t^3)}{(1+t^3)^3} \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} = \\ &= \frac{18a^2(1-2t^3)(t^6-7t^3+1) + 54a^2t^3(2-t^3)^2}{(1+t^3)^5} = \\ &= \frac{18a^2[(1-2t^3)(t^6-7t^3+1) + 3t^3(2-t^3)^2]}{(1+t^3)^5} = \\ &= \frac{18a^2[t^6-7t^3+1-2t^9+14t^6-2t^3+3t^3(4-4t^3+t^6)]}{(1+t^3)^5} = \\ &= \frac{18a^2(t^6-7t^3+1-2t^9+14t^6-2t^3+12t^3-12t^6+3t^9)}{(1+t^3)^5} = \\ &= \frac{18a^2(t^9+3t^6+3t^3+1)}{(1+t^3)^5} = \frac{18a^2(t^3+1)^3}{(1+t^3)^5} = \frac{18a^2}{(1+t^3)^2} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall t \in (-1, +\infty), \quad \alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t) = \frac{18a^2}{(1+t^3)^2}$$

Como ya teníamos estudiado el signo de la función $\alpha_1'(t)$, tendremos para nuestro cociente los siguientes signos:

	$(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$	$(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$
$\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)$	+	+
$(\alpha_1'(t))^3$	+	-
$\frac{\alpha_1'(t) \alpha_2''(t) - \alpha_2'(t) \alpha_1''(t)}{(\alpha_1'(t))^3}$	+	-

En virtud del resultado 3.22, podemos concluir:

la curva α es convexa en $(-1, \frac{1}{\sqrt[3]{2}})$

la curva α es cóncava en $(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, +\infty)$

Para finalizar, vamos a observar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -1^+} \alpha_1(t) &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{3at}{1+t^3} = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow -1^+} \alpha_2(t) &= \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{3at^2}{1+t^3} = +\infty \end{aligned}$$

i.e., cuando el parámetro t tiende a -1 por la derecha, la componente primera de α tiende a $-\infty$, y la segunda componente de α tiende a $+\infty$.

Más aún, ocurre:

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}}{\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}} = \lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3} = \frac{(-1)(2-(-1))}{1-2(-1)} = -1$$

Si recordamos que el cociente: $\frac{\alpha'_2(t)}{\alpha'_1(t)}$ era la pendiente de la tangente a la curva en el punto

$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$, lo anterior nos indica, que las pendientes de las tangentes a la curva α , en los puntos $\alpha(t)$ cuando t tiende a -1 por la derecha, tienen por límite -1 , o lo que es equivalente, la curva α , que sabemos que se aleja a ∞ cuando el valor del parámetro t se acerca a -1 por la derecha, lo hace según rectas cuyas pendientes se acercan a -1 .

Esto parece indicar, que nuestra curva se aleja a ∞ , con pendiente -1 , i.e., según le marca una recta con pendiente -1 . Dicho con otras palabras, parece que nuestra curva tiene una asíntota, con pendiente -1 .

Vamos a intentar estudiar si esto es cierto.

Si lo fuera, i.e., si nuestra curva tiene una asíntota oblicua y pretendiéramos conocer su ordenada en el origen, podemos proceder como sigue:

Tomamos la recta tangente a la curva α para un valor de $t \in (-1, +\infty)$, arbitrario. Tal recta tendrá por ecuaciones paramétricas:

$$r_t \equiv \begin{cases} x = \frac{3at}{1+t^3} + \lambda \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \\ y = \frac{3at^2}{1+t^3} + \lambda \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} \end{cases}$$

Determinamos ahora la ordenada en el origen de todas estas rectas, lo hacemos determinando las coordenadas del punto: $r_t \cap OY$.

Esto lo podemos hacer como sigue:

$$x = 0 \Leftrightarrow \frac{3at}{1+t^3} + \lambda \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = 0 \Leftrightarrow \lambda \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} = -\frac{3at}{(1+t^3)}$$

Teniendo precaución de que $3a(1-2t^3) \neq 0$, i.e. $\forall t \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, tendremos:

$$x = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-3at(1+t^3)^2}{3a(1-2t^3)(1+t^3)} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-t(1+t^3)}{1-2t^3}$$

i.e., la ordenada en el origen de la tangente a α , para cualquier valor de

$$t \in (-1, +\infty), \quad t \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

Será:

$$\begin{aligned} & \frac{3at^2}{1+t^3} - \frac{t(1+t^3)}{1-2t^3} \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3at^2}{1+t^3} - \frac{3at^2(2-t^3)}{(1-2t^3)(1+t^3)} = \\ & = \frac{3at^2(1-2t^3) - 3at^2(2-t^3)}{(1-2t^3)(1+t^3)} = \frac{3at^2(1-2t^3-2+t^3)}{(1-2t^3)(1+t^3)} = \\ & = \frac{3at^2(-1-t^3)}{(1-2t^3)(1+t^3)} = \frac{-3at^2(1+t^3)}{(1-2t^3)(1+t^3)} = \frac{-3at^2}{(1-2t^3)} \end{aligned}$$

Si hacemos tender nuevamente t hacia -1 por la derecha, tendremos:

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{-3at^2}{(1-2t^3)} = \frac{-3a}{3} = -a$$

i.e., las ordenadas en el origen de todas las tangentes a nuestra curva, cuando t tiende a -1 por la derecha, se acercan el valor: $-a$.

Parece indicarnos, todo lo anterior, que la recta de ecuación: $y = -x - a$ puede ser una asíntota oblicua para la traza de la curva α .

Si pretendemos confirmarlo con algo más de rigor, podemos proceder como sigue:

Observemos que:

$$\forall t \in (-1, 0), \quad \alpha'_1(t) = \frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2} \neq 0$$

Entonces, según un resultado anterior, la traza de $\alpha|_{(-1,0)}$ es grafo de la función $f = \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1}$ en $\alpha_1(-1,0) = (-\infty, 0)$.

Ahora, para la función f tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\alpha_2(\alpha_1^{-1}(x))}{\alpha_1(\alpha_1^{-1}(x))} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3a(\alpha_1^{-1}(x))^2}{(1+(\alpha_1^{-1}(x))^3)}}{3a\alpha_1^{-1}(x)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3a(\alpha_1^{-1}(x))^2}{3a(\alpha_1^{-1}(x))} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_1^{-1}(x)) \end{aligned}$$

Y siendo α_1 una función estrictamente creciente en $(-1,0)$, por ser:

$$\alpha'_1(t) > 0, \quad \forall t \in (-1,0)$$

Tendremos, que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_1^{-1}(x)) = -1$$

i.e.,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_1^{-1}(x)) = -1$$

Y también:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-1)x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) + \alpha_1(\alpha_1^{-1}(x))) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3a(\alpha_1^{-1}(x))^2}{1+(\alpha_1^{-1}(x))^3} + \frac{3a(\alpha_1^{-1}(x))}{1+(\alpha_1^{-1}(x))^3} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3a((\alpha_1^{-1}(x))^2 + (\alpha_1^{-1}(x)))}{1+(\alpha_1^{-1}(x))^3} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3a\alpha_1^{-1}(x)(1+\alpha_1^{-1}(x))}{(1+\alpha_1^{-1}(x))((\alpha_1^{-1}(x))^2 - \alpha_1^{-1}(x) + 1)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3a\alpha_1^{-1}(x)}{(\alpha_1^{-1}(x))^2 - \alpha_1^{-1}(x) + 1} = \frac{-3a}{1+1+1} = \frac{-3a}{3} = -a \end{aligned}$$

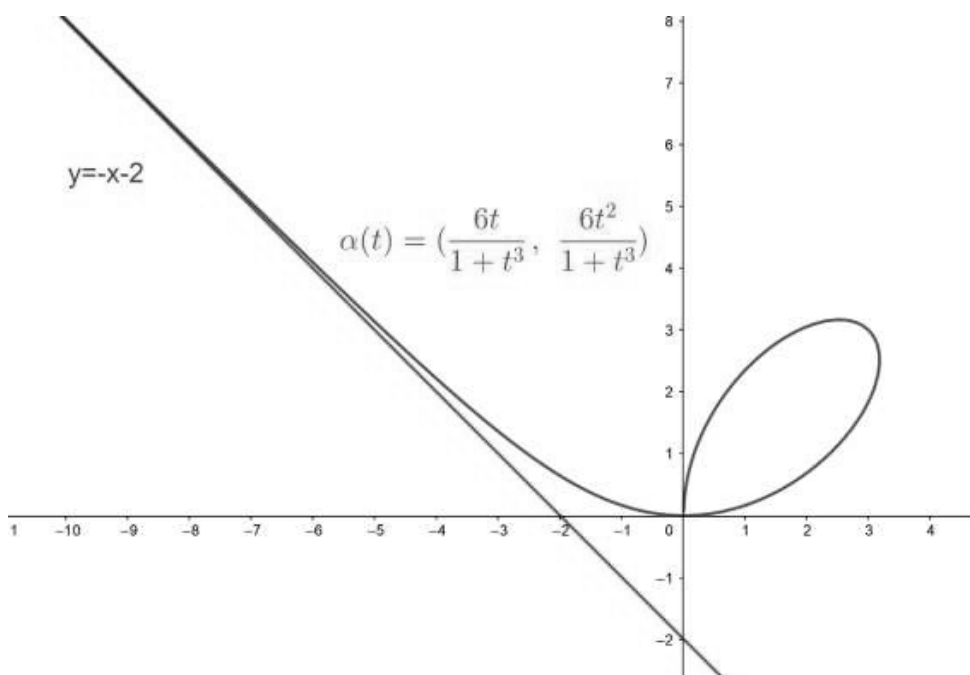
Ocurre, en resumen de todo esto:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha_2(\alpha_1^{-1}(x)) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-1)x) &= -a\end{aligned}$$

Luego la recta $y = -x - a$ es una asíntota oblicua para el grafo de la función f , y en consecuencia, como: $\text{graf}(f) = \text{traz}(\alpha|_{(-1,0)})$, la recta

$y = -x - a$ será una asíntota oblicua para nuestra curva α

Podemos, ahora ya hacer un esbozo de su traza.



4.7 Rosa de tres pétalos

Tomemos $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, y vamos a considerar la función:

$$\begin{aligned}f: \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = a \operatorname{sen}(3\theta)\end{aligned}$$

Sin duda, f es en principio una función que queda bien definida.

Es, por álgebra y composición de funciones continuas, una función continua en todo su dominio de definición.

Por álgebra y composición de derivadas es también derivable en todo su dominio de definición y además:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad f'(\theta) = 3a \cos(3\theta)$$

Función (f'), que vuelve a ser continua en todo su dominio de definición.

Si notamos por:

$$A = \text{Dom}(f) = \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$$

Tendremos que: $f \in C^1(A)$, y sin duda: $A \subseteq [0, 2\pi)$

Pero ocurre además lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) &\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow 0 < 3\theta < \pi \Rightarrow \text{sen}(3\theta) > 0 \Rightarrow a \text{sen}(3\theta) > 0 \\ &\Rightarrow f(\theta) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) &\Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \Rightarrow 2\pi < 3\theta < 3\pi \Rightarrow 0 < 3\theta - 2\pi < \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{sen}(3\theta - 2\pi) > 0 \Rightarrow \text{sen}(3\theta) > 0 \Rightarrow a \text{sen}(3\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) &\Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow 4\pi < 3\theta < 5\pi \Rightarrow 0 < 3\theta - 4\pi < \pi \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{sen}(3\theta - 4\pi) > 0 \Rightarrow \text{sen}(3\theta) > 0 \Rightarrow a \text{sen}(3\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0 \end{aligned}$$

Luego:

$$\forall \theta \in A = \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad f(\theta) > 0$$

Tenemos así:

$$f \in C^1(A) \quad \text{y} \quad \forall \theta \in A, \quad f(\theta) \in (0, +\infty)$$

i.e.,

$$\begin{aligned} f: A \subseteq [0, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = a \text{sen}(3\theta) \end{aligned}$$

Y $f \in C^1(A)$.

Podemos considerar en estas condiciones la gráfica de f en coordenadas polares:

$$\begin{aligned} \text{graf}_{pol}(f) &= \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A\} = \\ &= \left\{ (f(\theta), \theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

Que tendrá una representación cartesiana:

$$\psi(\text{graf}_{pol}(f)) = \{(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \text{sen} \theta), \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \cup \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)\}$$

Clásicamente, a la representación en el plano cartesiano de este conjunto de puntos es a lo que se llama: “rosa de tres pétalos”.

Nosotros vamos a dividir su estudio en tres ramas, para ajustarnos al contexto que venimos desarrollando a lo largo de nuestro escrito.

Vamos a considerar las funciones:

$$\begin{aligned} f_1: \left(0, \frac{\pi}{3}\right) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_1(\theta) = a \text{sen}(3\theta) \\ f_2: \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_2(\theta) = a \text{sen}(3\theta) \\ f_3: \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_3(\theta) = a \text{sen}(3\theta) \end{aligned}$$

Y vamos a intentar trazar la representación cartesiana de las gráficas de las funciones f_j , con $j = 1, 2, 3$ en coordenadas polares.

Ocurre sin duda, que:

$$\begin{aligned}\psi(\text{graf}_{pol}(f)) &= \psi(\text{graf}_{pol}(f_1)) \cup \psi(\text{graf}_{pol}(f_2)) \cup \psi(\text{graf}_{pol}(f_3)) = \\ &= \bigcup_{j=1}^3 \psi(\text{graf}_{pol}(f_j))\end{aligned}$$

Bien, pues vamos a empezar estudiando la primera, i.e., vamos a empezar estudiando:

$$\psi(\text{graf}_{pol}(f_1)) = \{(f_1(\theta) \cos \theta, f_1(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{3})\}$$

Ya sabemos que $f_1 \in C^1(0, \frac{\pi}{3})$, por tanto, en virtud de un resultado anterior, tenemos que la función:

$$\begin{aligned}\alpha: (0, \frac{\pi}{3}) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow \alpha(\theta) = (f_1(\theta) \cos \theta, f_1(\theta) \sin \theta)\end{aligned}$$

Es una curva regular plana que cumple, que:

$$\text{traz}(\alpha) = \psi(\text{graf}_{pol}(f_1))$$

Vamos a intentar entonces, representar la curva α , i.e determinar su traza.

Observemos en principio, que si: $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$, tenemos:

De un lado:

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3\theta < \pi \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin(3\theta) < 1 \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \sin(3\theta) \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 0 < a \sin(3\theta) \cos(\theta) < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < f_1(\theta) \cos(\theta) < a \Rightarrow \alpha_1(\theta) = a \sin(3\theta) \cos(\theta) \in (0, a) \subseteq [0, a]$$

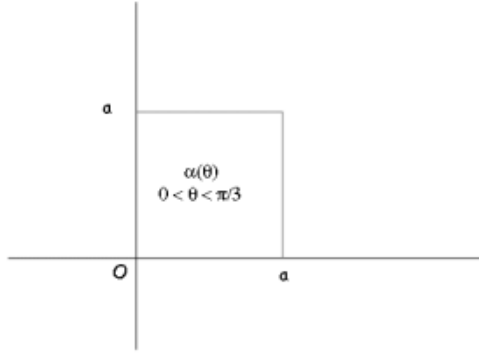
Y de otro lado:

$$\theta \in (0, \frac{\pi}{3}) \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3\theta < \pi \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin(3\theta) < 1 \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \sin(3\theta) \sin(\theta) < 1 \Rightarrow 0 < a \sin(3\theta) \sin(\theta) < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < f_1(\theta) \sin(\theta) < a \Rightarrow \alpha_2(\theta) = a \sin(3\theta) \sin(\theta) \in (0, a) \subseteq [0, a]$$

Tenemos en resumen:



Si $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, entonces:
 $(\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)) \in [0, a] \times [0, a]$
 i.e.,
 $\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,
 $\alpha(\theta) \in [0, a] \times [0, a]$

Vamos a estudiar ahora su crecimiento.

Siendo α una curva regular plana, como sabemos, ocurre que α_1 y α_2 son dos funciones derivables en $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, y además:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \alpha'_1(\theta) = 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \sin(3\theta) \sin(\theta) \\ \alpha'_2(\theta) = 3a \cos(3\theta) \sin(\theta) + a \sin(3\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_1(\theta) &= 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \sin(3\theta) \sin(\theta) = \\ &= 3a \cos(2\theta + \theta) \cos(\theta) - a \sin(2\theta + \theta) \sin(\theta) = \\ &= 3a \cos(\theta) [\cos(2\theta) \cos(\theta) - \sin(2\theta) \sin(\theta)] \\ &\quad - a \sin(\theta) [\sin(2\theta) \cos(\theta) + \cos(2\theta) \sin(\theta)] = \\ &= 3a \cos(\theta) [(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \cos(\theta) - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta)] - \\ &\quad - a \sin(\theta) [2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\theta) + (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \sin(\theta)] = \\ &= 3a \cos(\theta) [\cos^3(\theta) - \sin^2(\theta) \cos(\theta) - 2 \sin^2(\theta) \cos(\theta)] - \\ &\quad - a \sin(\theta) [2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta)] = \\ &= 3a \cos(\theta) [\cos^3(\theta) - 3 \sin^2(\theta) \cos(\theta)] - a \sin(\theta) [3 \sin(\theta) \cos^2(\theta) - \sin^3(\theta)] = \\ &= 3a \cos^4(\theta) - 9a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) - 3a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) = \\ &= 3a \cos^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_2(\theta) &= 3a \cos(3\theta) \sin(\theta) + a \sin(3\theta) \cos(\theta) = \\ &= 3a \cos(2\theta + \theta) \sin(\theta) + a \sin(2\theta + \theta) \cos(\theta) = \\ &= 3a \sin(\theta) [\cos(2\theta) \cos(\theta) - \sin(2\theta) \sin(\theta)] \\ &\quad + a \cos(\theta) [\sin(2\theta) \cos(\theta) + \cos(2\theta) \sin(\theta)] = \\ &= 3a \sin(\theta) [(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \cos(\theta) - 2 \sin(\theta) \cos(\theta) \sin(\theta)] + \\ &\quad + a \cos(\theta) [2 \sin(\theta) \cos(\theta) \cos(\theta) + (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) \sin(\theta)] = \\ &= 3a \sin(\theta) [\cos^3(\theta) - \sin^2(\theta) \cos(\theta) - 2 \sin^2(\theta) \cos(\theta)] + \\ &\quad + a \cos(\theta) [2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) + \cos^2(\theta) \sin(\theta) - \sin^3(\theta)] = \\ &= 3a \sin(\theta) [\cos^3(\theta) - 3 \sin^2(\theta) \cos(\theta)] + \\ &\quad + a \cos(\theta) [3 \sin(\theta) \cos^2(\theta) - \sin^3(\theta)] = \\ &= 3a \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 9a \sin^3(\theta) \cos(\theta) + 3a \sin(\theta) \cos^3(\theta) - a \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\ &= 6a \sin(\theta) \cos^3(\theta) - 10a \sin^3(\theta) \cos(\theta) = \\ &= 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] \end{aligned}$$

En resumen:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \alpha'_1(\theta) = 3a \cos^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) \\ \alpha'_2(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] \end{cases}$$

Bien, pues vamos a intentar estudiar el signo de ambas funciones en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$.

Empecemos por la primera:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_1(\theta) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ y \\ \alpha'_1(\theta) = 0 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} tg(0) < tg(\theta) < tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y \\ 3a \cos^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ \frac{3a \cos^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} - \frac{12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{a \cos^4(\theta)} + \frac{a \sin^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ 3 - 12tg^2(\theta) + tg^4(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ tg^2(\theta) = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ tg^2(\theta) = 6 \pm \sqrt{33} \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ tg(\theta) = \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{33}} \end{cases} \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \alpha'_1(\theta) = 0 &\Rightarrow \begin{cases} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ tg(\theta) = -\sqrt{6 - \sqrt{33}} \text{ ó } tg(\theta) = -\sqrt{6 + \sqrt{33}} \text{ ó } tg(\theta) = \sqrt{6 - \sqrt{33}} \text{ ó } tg(\theta) = \sqrt{6 + \sqrt{33}} \end{cases} \\ &\Rightarrow tg(\theta) = \sqrt{6 - \sqrt{33}} \end{aligned}$$

Tenemos por tanto:

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_1(\theta) = 0 \Rightarrow tg(\theta) = \sqrt{6 - \sqrt{33}}$$

De otro lado, puesto que la función:

$$\begin{aligned} tg: \left[0, \frac{\pi}{3}\right] &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow tg(x) \end{aligned}$$

Es una función continua en $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ y además:

$$tg(0) = 0 \text{ y } tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Tendremos en virtud del resultado de los valores intermedios, que tomará todos los valores comprendidos ente 0 y $\sqrt{3}$. Además sólo una vez cada uno de ellos, por ser estrictamente creciente.

Bien, pues como ocurre que: $0 < \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{3}$, tendremos que:

$$\exists ! \theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad tg(\theta_1) = \sqrt{6 - \sqrt{33}}$$

Y si nos fijamos en tal $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, ocurrirá:

$$\begin{aligned} tg(\theta_1) &= \sqrt{6 - \sqrt{33}} \Rightarrow tg(\theta_1) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (tg(\theta_1) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}) \cdot (tg(\theta_1) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}) \cdot (tg(\theta_1) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}) \cdot (tg(\theta_1) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}) &= 0 \\ \Rightarrow (tg^2(\theta_1) - (6 - \sqrt{33})) \cdot (tg^2(\theta_1) - (6 + \sqrt{33})) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow tg^4(\theta_1) - (6 + \sqrt{33})tg^2(\theta_1) - (6 - \sqrt{33})tg^2(\theta_1) + (36 - 33) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow tg^4(\theta_1) - 12tg^2(\theta_1) + 3 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \cos^4(\theta_1)tg^4(\theta_1) - 12a \cos^2(\theta_1)tg^2(\theta_1) + 3a \cos^4(\theta_1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \sin^4(\theta_1) - 12a \sin^2(\theta_1) \cos^2(\theta_1) + 3a \cos^4(\theta_1) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha'_1(\theta_1) &= 0 \end{aligned}$$

Podemos resumir todo lo anterior como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \text{entonces:} \\ \alpha'_1(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_1 = \arctg\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \end{aligned}$$

Pero además, ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (0, \theta_1) &= \left(0, \arctg\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \Rightarrow 0 < \theta < \arctg\sqrt{6 - \sqrt{33}} \Rightarrow \\ \Rightarrow tg(0) < tg(\theta) < \sqrt{6 - \sqrt{33}} &\Rightarrow \\ \Rightarrow -\sqrt{6 + \sqrt{33}} < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < 0 < tg(\theta) < \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{6 + \sqrt{33}} &\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(tg(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) > 0 \\ \left(tg(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) > 0 \\ \left(tg(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) < 0 \\ \left(tg(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left(tg(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) > 0$$

$$\Rightarrow \left(tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) \right) \left(tg^2(\theta) - (6 - \sqrt{33}) \right) > 0 \Rightarrow$$

$$tg^4(\theta) - (6 - \sqrt{33})tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33})tg^2(\theta) + (36 - 33) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^4(\theta) - 12tg^2(\theta) + 3 > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a \cos^4(\theta))(tg^4(\theta) - 12tg^2(\theta) + 3) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cos^4(\theta) tg^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) tg^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \sen^4(\theta) - 12a \sen^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha'_1(\theta) > 0$$

i.e.,

$$\forall \theta \in (0, \theta_1), \quad \alpha'_1(\theta) > 0$$

Y si tomamos ahora: $\theta \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3} \right)$, tendremos:

$$\theta \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3} \right) = \left(\arctg \left(\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right), \frac{\pi}{3} \right) \Rightarrow \arctg \left(\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{6 - \sqrt{33}} < tg(\theta) < tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \sqrt{6 - \sqrt{33}} < tg(\theta) < \sqrt{3} < \sqrt{6 + \sqrt{33}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{6 + \sqrt{33}} < tg(\theta) \\ -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < tg(\theta) \\ \sqrt{6 - \sqrt{33}} < tg(\theta) \\ tg(\theta) < \sqrt{6 + \sqrt{33}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} > 0 \\ tg(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} > 0 \\ tg(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} > 0 \\ tg(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) < 0 \Rightarrow \\
 &\quad \left(tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) \right) \left(tg^2(\theta) - (6 - \sqrt{33}) \right) < 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow tg^4(\theta) - (6 - \sqrt{33}) tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) tg^2(\theta) + (36 - 33) < 0 \Rightarrow \\
 &\quad \Rightarrow tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3 < 0 \Rightarrow \\
 &\quad \Rightarrow a \cos^4(\theta) (tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3) < 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a \cos^4(\theta) tg^4(\theta) - 12 a \cos^4(\theta) tg^2(\theta) + 3 a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a \sen^4(\theta) - 12 a \sen^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3 a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \\
 &\quad \Rightarrow \alpha'_1(\theta) < 0
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall \theta \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3} \right), \quad \alpha'_1(\theta) < 0$$

Para el signo de la función α'_1 en $\left(0, \frac{\pi}{3} \right)$, tenemos, en resumen:

	$(0, \theta_1)$	$\left(\theta_1, \frac{\pi}{3} \right)$
$\alpha'_1(\theta)$	+	-

Es, por consiguiente α_1 una función estrictamente creciente en $(0, \theta_1)$ y estrictamente decreciente en $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3} \right)$.

Y es $\alpha'_1(\theta_1) = 0$

Siendo: $\theta_1 = \arctan(\sqrt{6 - \sqrt{33}})$

Para la función α'_2 ocurrirá ahora lo siguiente:

$$\alpha'_2(\theta) = 2 a \sen(\theta) \cos(\theta) (3 \cos^2(\theta) - 5 \sen^2(\theta)), \quad \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3} \right)$$

Entonces si $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3} \right)$, cumple que $\alpha'_2(\theta) = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 &\left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3} \right) \\ y \\ 2 a \sen(\theta) \cos(\theta) (3 \cos^2(\theta) - 5 \sen^2(\theta)) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < \theta < \frac{\pi}{3} \\ y \\ 3 \cos^2(\theta) - 5 \sen^2(\theta) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < tg(\theta) < tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ y \\ 3 \cos^2(\theta) = 5 \sen^2(\theta) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ \frac{\sen^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 < tg(\theta) < \sqrt{3} \\ y \\ tg^2(\theta) = \frac{3}{5} \end{array} \right\} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < \underset{y}{tg(\theta)} < \sqrt{3} \\ tg(\theta) = \pm \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \underset{y}{tg(\theta)} < \sqrt{3} \\ tg(\theta) = \sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

Luego:

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_2(\theta) = 0 \Rightarrow \text{tal } \theta \text{ cumple: } tg(\theta) = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

De otro lado, la función tangente es una función continua y estrictamente creciente en $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ y además:

$$tg(0) = 0 \quad y \quad tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Entonces, como:

$$0 = tg(0) < \sqrt{\frac{3}{5}} < \sqrt{3} = tg\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

En virtud de la propiedad de los valores intermedios y de la inyectividad (por ser estrictamente creciente) de nuestra función, tendremos que:

$$\exists ! \theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad tg(\theta_2) = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Bien, pues para tal $\theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, $tg(\theta_2) = \sqrt{\frac{3}{5}}$, ocurre lo siguiente:

$$tg^2(\theta_2) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\sen^2(\theta_2)}{\cos^2(\theta_2)} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 \sen^2(\theta_2) = 3 \cos^2(\theta_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cos^2(\theta_2) - 5 \sen^2(\theta_2) = 0 \Rightarrow 2a \sen(\theta_2) \cos(\theta_2) [3 \cos^2(\theta_2) - 5 \sen^2(\theta_2)] = 0$$

$$\Rightarrow \alpha'_2(\theta_2) = 0$$

i.e.,

$$\theta_2 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \theta_2 = \arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \quad \text{cumple que: } \alpha'_2(\theta_2) = 0$$

Tenemos, en resumen, de todo lo anterior:

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \text{entonces:}$$

$$\alpha'_2(\theta) = 0 \leftrightarrow \theta = \theta_2 = \arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

Si tomamos además $\theta \in (0, \theta_2)$, tendremos:

$$\begin{aligned} \theta \in (0, \theta_2) &= \left(0, \arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) \Rightarrow 0 < \theta < \arctg\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow tg(0) < tg(\theta) < \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow 0 < tg^2(\theta) < \frac{3}{5} \Rightarrow 0 < \frac{\sen^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} < \frac{3}{5} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 < 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 3 \cos^2(\theta) \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) > 0$$

Como además:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \operatorname{sen}(\theta) > 0 \quad y \quad \cos(\theta) > 0$$

Entonces:

$$\forall \theta \in (0, \theta_2), \quad 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta)] > 0$$

i.e.,

$$\forall \theta \in (0, \theta_2), \quad \alpha'_2(\theta) = 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta)] > 0$$

Y si tomamos: $\theta \in \left(\theta_2, \frac{\pi}{3}\right)$, tendremos:

$$\theta \in \left(\theta_2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) < \theta < \frac{\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{5}} < \operatorname{tg}(\theta) < \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{3}{5} < \operatorname{tg}^2(\theta) \Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cos^2(\theta) < 5 \operatorname{sen}^2(\theta) \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0$$

Como siguen siendo: $\operatorname{sen}(\theta) > 0$ y $\cos(\theta) > 0$, $\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, será:

$$\forall \theta \in \left(\theta_2, \frac{\pi}{3}\right), \quad 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta)] < 0$$

i.e.,

$$\forall \theta \in \left(\theta_2, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_2(\theta) = 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta)] < 0$$

Tenemos por tanto, para el signo de la función α'_2 en $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$:

	$(0, \theta_2)$	$\left(\theta_2, \frac{\pi}{3}\right)$
$\alpha'_2(\theta)$	+	-

De esta manera:

$$\alpha_2 \text{ es estrictamente creciente en } (0, \theta_2) = \left(0, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$$

$$\alpha_2 \text{ es estrictamente decreciente en } \left(\theta_2, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \frac{\pi}{3}\right)$$

$$y \text{ en } \theta_2 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \quad \alpha_2 \text{ alcanza un máximo de relativo}$$

Esto hace, según la definición 3.8, que la curva α alcance un máximo relativo en este punto.

Para estudiar el crecimiento ó decrecimiento de α , podemos proceder como sigue:

$$\begin{aligned}
 729 < 825 &\Rightarrow 27^2 < 25 \cdot 33 \Rightarrow 27 < 5\sqrt{33} \Rightarrow 30 - 3 < 5\sqrt{33} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 30 - 5\sqrt{33} < 3 \Rightarrow \frac{30 - 5\sqrt{33}}{5} < \frac{3}{5} \Rightarrow 6 - \sqrt{33} < \frac{3}{5} \Rightarrow 0 < 6 - \sqrt{33} < \frac{3}{5} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0 < \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow 0 < \arctan\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) < \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{3}
 \end{aligned}$$

Hacemos ahora la siguiente tabla:

	$(0, \theta_1)$	(θ_1, θ_2)	$(\theta_2, \frac{\pi}{3})$
$\alpha'_1(\theta)$	+	-	-
$\alpha'_2(\theta)$	+	+	-
$\alpha'_1(\theta) \alpha'_2(\theta)$	+	-	+

En virtud de algunos resultados anteriores, podemos asegurar:

$$\begin{aligned}
 \alpha \text{ es estrictamente creciente en } (0, \theta_1) &= \left(0, \arctan\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\right) \\
 \alpha \text{ es estrictamente creciente en } (\theta_1, \theta_2) &= \left(\arctan\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right), \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) \\
 \alpha \text{ es estrictamente creciente en } (\theta_2, \frac{\pi}{3}) &= \left(\arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \frac{\pi}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Sabemos que α tiene un punto con tangente vertical, el correspondiente a

$\theta_1 = \arctan\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)$, tiene un punto con tangente horizontal, el que corresponde a

$\theta_2 = \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$, donde además alcanza un máximo relativo.

Para seguir conociendo la traza de la curva α , vamos a estudiar ahora su concavidad y convexidad.

Tenemos:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \alpha'_1(\theta) = 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \sin(3\theta) \sin(\theta) \\ \alpha'_2(\theta) = 3a \cos(3\theta) \sin(\theta) + a \sin(3\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Ambas funciones, α'_1 y α'_2 son funciones derivables en $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$, y se tiene:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\begin{aligned}
 \alpha''_1(\theta) &= -3a \cdot 3 \sin(3\theta) \cos(\theta) - 3a \cos(3\theta) \sin(\theta) - a \cdot 3 \cos(3\theta) \sin(\theta) - \\
 &\quad - a \sin(3\theta) \cos(\theta) = -10a \sin(3\theta) \cos(\theta) - 6a \cos(3\theta) \sin(\theta)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \alpha''_2(\theta) &= -3a \cdot 3 \sin(3\theta) \sin(\theta) + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - \\
 &\quad - a \sin(3\theta) \sin(\theta) = -10a \sin(3\theta) \sin(\theta) + 6a \cos(3\theta) \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \alpha''_1(\theta) = -10a \sin(3\theta) \cos(\theta) - 6a \cos(3\theta) \sin(\theta) \\ \alpha''_2(\theta) = -10a \sin(3\theta) \sin(\theta) + 6a \cos(3\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Vamos a estudiar entonces la función $\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha'_2(\theta) \alpha''_1(\theta)$

Tenemos de un lado:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) &= (3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta)) \\ &\quad (-10a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 6a \cos(3\theta) \cos(\theta)) = \\ &= -30a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 18a^2 \cos^2(3\theta) \cos^2(\theta) + \\ &\quad + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) - 6a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = \\ &= -36a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 18a^2 \cos^2(3\theta) \cos^2(\theta) + \\ &\quad + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) \end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha'_2(\theta) \alpha''_1(\theta) &= (3a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) + a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta)) \\ &\quad (-10a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) - 6a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta)) = \\ &= -30a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - 18a^2 \cos^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) - \\ &\quad - 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \cos^2(\theta) - 6a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) = \\ &= -36a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - 18a^2 \cos^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) - \\ &\quad - 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \cos^2(\theta) \end{aligned}$$

De donde se tendrá:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \\ \alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha'_2(\theta) \alpha''_1(\theta) &= \\ &= (-36a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 18a^2 \cos^2(3\theta) \cos^2(\theta) \\ &\quad + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta)) \\ &\quad - (-36a^2 \cos(3\theta) \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) - 18a^2 \cos^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) \\ &\quad - 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \cos^2(\theta)) = \\ &= 18a^2 \cos^2(3\theta) \cos^2(\theta) + 18a^2 \cos^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \operatorname{sen}^2(\theta) \\ &\quad + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \cos^2(\theta) = \\ &= 18a^2 \cos^2(3\theta) [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)] + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) [\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)] = \\ &= 18a^2 \cos^2(3\theta) + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \end{aligned}$$

i.e:

$$\forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha'_2(\theta) \alpha''_1(\theta) = 18a^2 \cos^2(3\theta) + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta)$$

Y sin duda:

$$18a^2 \cos^2(3\theta) + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) > 0, \quad \forall \theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$$

Para estudiar entonces la concavidad o convexidad de nuestra curva α , tendremos:

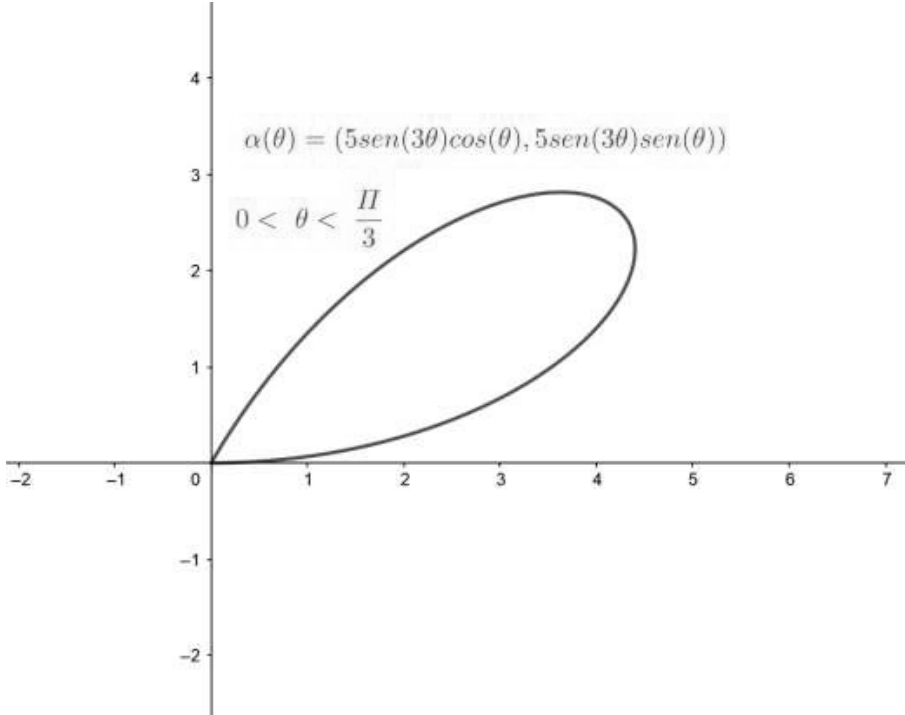
	$(0, \theta_1)$	$\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$
$\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha'_2(\theta) \alpha''_1(\theta)$	+	+
$(\alpha'_1(\theta))^3$	+	-
$\frac{(\alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha'_2 \alpha''_1)(\theta)}{(\alpha'_1(\theta))^3}$	+	-

En virtud del resultado 3.22 podemos asegurar entonces lo siguiente:

La curva α es convexa en $(0, \theta_1) = \left(0, \arctan\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\right)$

La curva α es cóncava en $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) = \left(\arctan\left(\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right), \frac{\pi}{3}\right)$

Bien, pues con todo lo anterior podemos hacer el siguiente esbozo para nuestra curva (el pétalo de nuestra rosa correspondiente a la rama $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$)



Sigamos ahora con el estudio de la segunda rama (o el segundo pétalo) de nuestra rosa, i.e: vamos a considerar la función:

$$f_2: \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f_2(\theta) = a \operatorname{sen}(3\theta)$$

Y vamos a intentar representar:

$$\psi\left(\operatorname{graf}_{\text{pol}}(f_2)\right) = \left\{(f_2(\theta) \cos(\theta), f_2(\theta) \operatorname{sen}(\theta)), \quad \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)\right\}$$

Sabemos, que siendo $f_2 \in C^1\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, la función:

$$\beta: \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \beta(\theta) = (f_2(\theta) \cos(\theta), f_2(\theta) \operatorname{sen}(\theta))$$

Es una curva regular plana que cumple: $\operatorname{traz}(\beta) = \psi\left(\operatorname{graf}_{\text{pol}}(f_2)\right)$.

Intentemos entonces determinar la traza de β

En principio veamos las regiones del plano cartesiano donde se encuentra nuestro subconjunto:

Si $\theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, tenemos:

De un lado:

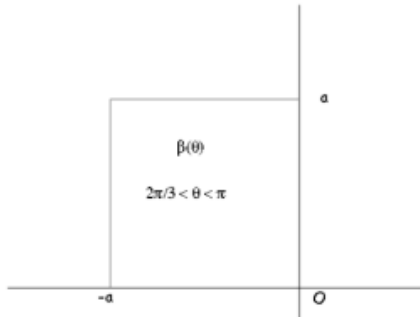
$$\begin{aligned} \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) &\Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \Rightarrow \begin{cases} 2\pi < 3\theta < 3\pi \\ \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3\theta - 2\pi < \pi \\ \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin(3\theta - 2\pi) < 1 \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin(3\theta) < 1 \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a \sin(3\theta) < a \\ 0 < -\cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < -a \sin(3\theta) \cos(\theta) < a \Rightarrow -a < a \sin(3\theta) \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -a < \beta_1(\theta) < 0 \Rightarrow \beta_1(\theta) \in (-a, 0) \subseteq [-a, 0] \end{aligned}$$

Y de otro:

$$\begin{aligned} \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) &\Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \Rightarrow \begin{cases} 2\pi < 3\theta < 3\pi \\ \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 3\theta - 2\pi < \pi \\ \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin(3\theta - 2\pi) < 1 \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \sin(3\theta) < 1 \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a \sin(3\theta) < a \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < a \sin(3\theta) \sin(\theta) < a \Rightarrow 0 < \beta_2(\theta) < a \Rightarrow \beta_2(\theta) \in (0, a) \subseteq [0, a] \end{aligned}$$

Luego:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \Rightarrow (\beta_1(\theta), \beta_2(\theta)) \in [-a, 0] \times [0, a]$$



Para estudiar ahora el crecimiento de β , procedemos como sigue:

β_1 y β_2 son dos funciones derivables en $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, y $\forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$,

$$\begin{aligned} \beta_1'(\theta) &= 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \sin(3\theta) \sin(\theta) \\ \beta_2'(\theta) &= 3a \cos(3\theta) \sin(\theta) + a \sin(3\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Si repetimos ahora las mismas operaciones efectuadas para la curva α , obtendremos que:

$$\forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \begin{cases} \beta_1'(\theta) = 3a \cos^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) \\ \beta_2'(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] \end{cases}$$

Para estudiar el signo de $\beta_1'(\theta)$ y $\beta_2'(\theta)$, vamos a empezar viendo si alguna vez pasan por cero.

$$\text{Sea } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \text{ con } \beta_1'(\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \text{De un lado: } \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \Rightarrow \\ \text{Y de otro lado: } \beta_1'(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{3} - \pi < \theta - \pi < 0 \\ 3a \cos^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} -\frac{\pi}{3} < \theta - \pi < 0 \\ \frac{3a \cos^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} - \frac{12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{a \cos^4(\theta)} + \frac{a \sin^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} = 0 \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta - \pi) = \operatorname{tg}(\theta) < \operatorname{tg}(0) \\ 3 - 12 \operatorname{tg}^2(\theta) + \operatorname{tg}^4(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta) < \operatorname{tg}(0) \\ \operatorname{tg}^2(\theta) = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < \operatorname{tg}(\theta) < 0 \\ \operatorname{tg}^2(\theta) = 6 \pm \sqrt{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < \operatorname{tg}(\theta) < 0 \\ \operatorname{tg}(\theta) = \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{33}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < \operatorname{tg}(\theta) < 0 \\ \operatorname{tg}(\theta) = -\sqrt{6 - \sqrt{33}} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Tenemos de esta manera:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \beta'_1(\theta) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = -\sqrt{6 - \sqrt{33}}$$

Si nos fijamos ahora en la función:

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{tg}: \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R} \\
 &\theta \rightarrow \operatorname{tg}(\theta)
 \end{aligned}$$

Y observamos que se trata de una función continua en $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, y que además:

$$-\sqrt{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < \operatorname{tg}(\pi) = 0$$

En virtud del resultado de los valores intermedios, tendremos que:

$$\exists \theta_3 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \operatorname{tg}(\theta_3) = -\sqrt{6 - \sqrt{33}}$$

Siendo además la función estrictamente creciente, como sabemos que es, podemos asegurar también, que:

$$\exists ! \theta_3 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \operatorname{tg}(\theta_3) = -\sqrt{6 - \sqrt{33}}$$

Y si tomamos tal $\theta_3 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, que cumple: $\operatorname{tg}(\theta_3) = -\sqrt{6 - \sqrt{33}}$, ocurre:

$$\begin{aligned}
 &\operatorname{tg}(\theta_3) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} = 0 \Rightarrow \\
 &\left(\operatorname{tg}(\theta_3) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\left(\operatorname{tg}(\theta_3) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\left(\operatorname{tg}(\theta_3) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)\left(\operatorname{tg}(\theta_3) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(\operatorname{tg}^2(\theta_3) - (6 - \sqrt{33})\right)\left(\operatorname{tg}^2(\theta_3) - (6 + \sqrt{33})\right) = 0 \Rightarrow \\
 &\operatorname{tg}^4(\theta_3) - (6 + \sqrt{33})\operatorname{tg}^2(\theta_3) - (6 - \sqrt{33})\operatorname{tg}^2(\theta_3) + (36 - 33) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \operatorname{tg}^4(\theta_3) - 12\operatorname{tg}^2(\theta_3) + 3 = 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow a \cos^4(\theta_3) \operatorname{tg}^4(\theta_3) - 12a \cos^4(\theta_3) \operatorname{tg}^2(\theta_3) + 3a \cos^4(\theta_3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \operatorname{sen}^4(\theta_3) - 12a \operatorname{sen}^2(\theta_3) \cos^2(\theta_3) + 3a \cos^4(\theta_3) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta'_1(\theta_3) = 0 \end{aligned}$$

Tenemos de esta manera:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \text{entonces:}$$

$$\beta'_1(\theta) = 0 \leftrightarrow \theta = \theta_3 = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)$$

Si tomamos ahora:

$$\begin{aligned} \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_3\right) &= \left(\frac{2\pi}{3}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\right) \Rightarrow \frac{2\pi}{3} < \theta < \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \left(\frac{2\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta) < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} \Rightarrow -\sqrt{3} < \operatorname{tg}(\theta) < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\sqrt{6 + \sqrt{33}} < -\sqrt{3} < \operatorname{tg}(\theta) < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{6 + \sqrt{33}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} > 0 \\ \operatorname{tg}(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} < 0 \end{cases} \quad y \quad \begin{cases} \operatorname{tg}(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} < 0 \\ \operatorname{tg}(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\operatorname{tg}(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) \left(\operatorname{tg}(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \left(\operatorname{tg}(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \left(\operatorname{tg}(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left(\operatorname{tg}^2(\theta) - (6 + \sqrt{33})\right) \left(\operatorname{tg}^2(\theta) - (6 - \sqrt{33})\right) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}^4(\theta) - (6 - \sqrt{33}) \operatorname{tg}^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) \operatorname{tg}^2(\theta) + (36 - 33) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}^4(\theta) - 12 \operatorname{tg}^2(\theta) + 3 < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \cos^4(\theta) \operatorname{tg}^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) \operatorname{tg}^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \operatorname{sen}^4(\theta) - 12a \operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \beta'_1(\theta) < 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_3\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\right) \subseteq \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \Rightarrow \beta'_1(\theta) < 0$$

Y si ahora tomamos: $\theta \in (\theta_3, \pi)$, tendremos:

$$\begin{aligned}
 \theta \in \left(\arctan \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right), \pi \right) &\Rightarrow \arctan \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) < \theta < \pi \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < \tan(\theta) < \tan(\pi) = 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\sqrt{6 + \sqrt{33}} < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < \tan(\theta) < 0 < \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{6 + \sqrt{33}} &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \begin{cases} \tan(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} > 0 \\ \tan(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} > 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \tan(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} < 0 \\ \tan(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} < 0 \end{cases} &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(\tan(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) \left(\tan(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \left(\tan(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \left(\tan(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}} \right) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(\tan^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) \right) \left(\tan^2(\theta) - (6 - \sqrt{33}) \right) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \tan^4(\theta) - (6 - \sqrt{33}) \tan^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) \tan^2(\theta) + (36 - 33) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \tan^4(\theta) - 12 \tan^2(\theta) + 3 > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow a \cos^4(\theta) \tan^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) \tan^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow a \sin^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow \beta'_1(\theta) > 0
 \end{aligned}$$

i.e:

$$\text{Si } \theta \in (\theta_3, \pi) = \left(\arctan \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right), \pi \right) \subseteq \left(\frac{2\pi}{3}, \pi \right) \Rightarrow \beta'_1(\theta) > 0$$

Para el signo de $\beta'_1(\theta)$, podemos hacer entonces la siguiente tabla:

	$\left(\frac{2\pi}{3}, \theta_3 \right)$	(θ_3, π)
$\beta'_1(\theta)$	–	+

Tenemos con esto lo siguiente:

$$\beta_1 \text{ es estrictamente decreciente en } \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_3 \right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \arctan \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right) \right)$$

$$\beta_1 \text{ es estrictamente creciente en } (\theta_3, \pi) = \left(\arctan \left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}} \right), \pi \right)$$

Y el hecho de que $\beta'_1(\theta_3) = 0$, quiere decir que la curva β tiene en $\beta(\theta_3)$ un punto de tangente vertical.

Veamos ahora que ocurre con $\beta'_2(\theta)$

$$\text{Sea } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi \right), \quad \text{que cumpla que } \beta'_2(\theta) = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \\ \beta_2'(\theta) = 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{3} < \theta < \pi \\ 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta)] = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{2\pi}{3} - \pi < \theta - \pi < 0 \\ 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) = 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta - \pi) = \operatorname{tg}(\theta) < \operatorname{tg}(0) \\ 3 \cos^2(\theta) = 5 \operatorname{sen}^2(\theta) \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\sqrt{3} < \operatorname{tg}(\theta) < 0 \\ \operatorname{tg}^2(\theta) = \frac{3}{5} \end{array} \right. \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = -\sqrt{\frac{3}{5}} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \beta_2'(\theta) = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Si nos fijamos nuevamente en la función:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}: \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\rightarrow \operatorname{tg}(\theta) \end{aligned}$$

Tendremos una función continua, estrictamente creciente en $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$, tal que:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} < -\sqrt{\frac{3}{5}} < 0 = \operatorname{tg}(\pi)$$

En virtud entonces del resultado de los valores intermedios y del crecimiento estricto de nuestra función, ocurrirá, que:

$$\exists ! \theta_4 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \operatorname{tg}(\theta_4) = -\sqrt{\frac{3}{5}}$$

Si nos fijamos en tal $\theta_4 \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, tenemos:

$$\operatorname{tg}(\theta_4) = -\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \operatorname{tg}^2(\theta_4) = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{\operatorname{sen}^2(\theta_4)}{\cos^2(\theta_4)} = \frac{3}{5} \Rightarrow 5 \operatorname{sen}^2(\theta_4) = 3 \cos^2(\theta_4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cos^2(\theta_4) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta_4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a \operatorname{sen}(\theta_4) \cos(\theta_4) [3 \cos^2(\theta_4) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta_4)] = 0$$

$$\Rightarrow \beta_2'(\theta_4) = 0$$

Tenemos, de esta manera:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \text{entonces:} \\ \beta_2'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_4 = \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \end{aligned}$$

Si ahora tomamos:

$$\theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) \subseteq \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{3} < \theta < \theta_4 &\Rightarrow \tan\left(\frac{2\pi}{3}\right) < \tan(\theta) < \tan(\theta_4) = -\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\sqrt{3} < \tan(\theta) < -\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \sqrt{3} > -\tan(\theta) > \sqrt{\frac{3}{5}} > 0 \Rightarrow \tan^2(\theta) > \frac{3}{5} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} > \frac{3}{5} \Rightarrow 5 \sin^2(\theta) > 3 \cos^2(\theta) \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta) < 0 \end{aligned}$$

También:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right) \subseteq \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta) > 0 \\ \cos(\theta) < 0 \end{cases}$$

Tendremos de esta manera:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right) \Rightarrow \begin{cases} 2a \sin(\theta) \cos(\theta) < 0 \\ 3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta'_2(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] > 0$$

i.e:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right) \Rightarrow \beta'_2(\theta) > 0$$

Y si tomamos:

$$\theta \in (\theta_4, \pi) = \left(\arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \pi\right) \subseteq \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \theta_4 < \theta < \pi &\Rightarrow \tan(\theta_4) < \tan(\theta) < \tan(\pi) \Rightarrow -\sqrt{\frac{3}{5}} < \tan(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{\frac{3}{5}} > -\tan(\theta) > 0 \Rightarrow \frac{3}{5} > \tan^2(\theta) \Rightarrow \frac{3}{5} > \frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) > 5 \sin^2(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta) > 0 \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{cases} \sin(\theta) > 0 \\ \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \sin(\theta) \cos(\theta) < 0 \Rightarrow 2a \sin(\theta) \cos(\theta) < 0$$

Por tanto:

$$\text{Si } \theta \in (\theta_4, \pi) \Rightarrow \begin{cases} 3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta) > 0 \\ 2a \sin(\theta) \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta'_2(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] < 0$$

Para el signo de $\beta'_2(\theta)$, podemos hacer entonces la siguiente tabla:

	$\left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right)$	(θ_4, π)
$\beta'_2(\theta)$	+	-

β_2 es una función estrictamente creciente en $\left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right)$

β_2 es estrictamente decreciente en $(\theta_4, \pi) = \left(\arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right), \pi\right)$

β_2 alcanza un máximo relativo en θ_4 , y por tanto la curva β tiene un máximo relativo en $\beta(\theta_4)$, además de un punto de tangente horizontal.

Para estudiar ahora el crecimiento ó decrecimiento de la curva β , observemos en principio lo siguiente:

$$\begin{aligned} 729 < 825 &\Rightarrow 27^2 < 25 \cdot 33 \Rightarrow 27 < 5\sqrt{33} \Rightarrow 30 - 3 < 5\sqrt{33} \Rightarrow \\ \Rightarrow 30 - 5\sqrt{33} < 3 &\Rightarrow 6 - \sqrt{33} < \frac{3}{5} \Rightarrow \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow -\sqrt{6 - \sqrt{33}} > -\sqrt{\frac{3}{5}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \arctan\left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) &> \arctan\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) \Rightarrow \theta_3 > \theta_4 \end{aligned}$$

Podemos recoger toda esta información en la siguiente tabla:

	$\left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right)$	(θ_4, θ_3)	(θ_3, π)
$\beta'_1(\theta)$	-	-	+
$\beta'_2(\theta)$	+	-	-
$\beta'_1(\theta) \cdot \beta'_2(\theta)$	-	+	-

En virtud de un resultado anterior, podemos concluir:

La curva β es estrictamente decreciente en $\left(\frac{2\pi}{3}, \theta_4\right)$

β es estrictamente creciente en (θ_4, θ_3)

β es estrictamente decreciente en (θ_3, π)

Y a esto podemos añadirle:

La curva β tiene un máximo relativo en $\beta(\theta_4)$

β tiene un punto de tangente horizontal en $\beta(\theta_4)$

β tiene un punto de tangente vertical en $\beta(\theta_3)$

Por último vamos a intentar estudiar su concavidad ó convexidad.

Las funciones β'_1 y β'_2 son funciones diferenciables en $\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$

Y para ellas se tiene:

$$\forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \begin{cases} \beta'_1(\theta) = 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \sin(3\theta) \sin(\theta) \\ \beta'_2(\theta) = 3a \cos(3\theta) \sin(\theta) + a \sin(3\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

$$\forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right),$$

$$\begin{aligned}\beta_1''(\theta) &= -3a \operatorname{sen}(3\theta) 3 \cos(\theta) - 3a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \\ &\quad - (3a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) + a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta)) = \\ &= -10a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) - 6a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \\ \beta_2''(\theta) &= -3a \operatorname{sen}(3\theta) 3 \operatorname{sen}(\theta) + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) + \\ &\quad + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) = \\ &= -10a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 6a \cos(3\theta) \cos(\theta)\end{aligned}$$

Si pretendemos estudiar nuevamente el signo de:

$$\frac{\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_2'(\theta) \beta_1''(\theta)}{(\beta_1'(\theta))^3}, \quad \forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \theta \neq \theta_3$$

Tendremos, que las expresiones para β_1' , β_2' , β_1'' , β_2'' son exactamente las mismas que para α_1' , α_2' , α_1'' y α_2'' respectivamente, y por tanto quedará, que:

$$\forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right),$$

$$\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_2'(\theta) \beta_1''(\theta) = 18a^2 \cos^2(3\theta) + 10a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta)$$

i.e:

$$\forall \theta \in \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right), \quad \beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_2'(\theta) \beta_1''(\theta) > 0$$

Tendremos por tanto:

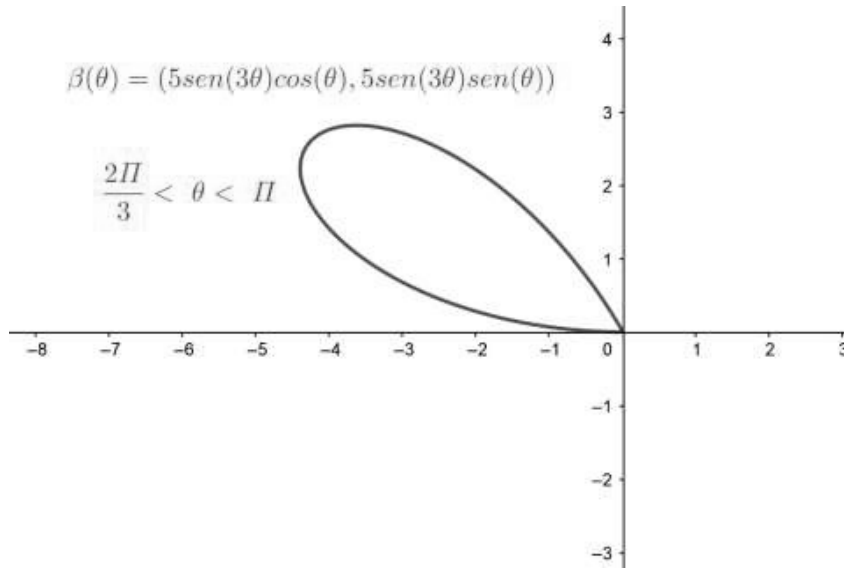
	$\left(\frac{2\pi}{3}, \theta_3\right)$	(θ_3, π)
$(\beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'')(\theta)$	+	+
$(\beta_1'(\theta))^3$	-	+
$\frac{(\beta_1' \beta_2'' - \beta_2' \beta_1'')(\theta)}{(\beta_1'(\theta))^3}$	-	+

Y según el resultado: 3.22, podemos asegurar:

$$\text{La curva } \beta \text{ es cóncava en } \left(\frac{2\pi}{3}, \theta_3\right) = \left(\frac{2\pi}{3}, \operatorname{arc tg}\left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\right)$$

$$\text{La curva } \beta \text{ es convexa en } (\theta_3, \pi) = \left(\operatorname{arc tg}\left(-\sqrt{6 - \sqrt{33}}\right), \pi\right)$$

Y conocido todo esto, podemos hacer un esbozo de la curva β , segundo pétalo de nuestra rosa de tres pétalos.



Para el estudio de la tercera rama (o tercer pétalo), consideramos la función:

$$f_3: \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f_3(\theta) = a \text{sen}(3\theta)$$

Y vamos a intentar representar:

$$\psi\left(\text{graf}_{\text{pol}}(f_3)\right) = \left\{ (f_3(\theta) \cos(\theta), f_3(\theta) \text{sen}(\theta)), \quad \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \right\}$$

Sabemos, que siendo $f_3 \in C^1\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$, la función:

$$\gamma: \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \subseteq [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \gamma(\theta) = (f_3(\theta) \cos(\theta), f_3(\theta) \text{sen}(\theta))$$

es una curva regular plana, que cumple:

$$\text{traz}(\gamma) = \psi\left(\text{graf}_{\text{pol}}(f_3)\right)$$

Vamos a intentar representar entonces la traza de la curva:

$$\gamma: \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \gamma(\theta) = (a \text{sen}(3\theta) \cos(\theta), a \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\theta))$$

Empecemos viendo en que regiones del plano puede encontrarse:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4\pi < 3\theta < \frac{9\pi}{2} \\ \pi < \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \text{sen}(3\theta) < 1 \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a \text{sen}(3\theta) < a \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a \operatorname{sen}(3\theta) < a \\ 0 < -\cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < -a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 > a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) > -a \Rightarrow -a < a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) = \gamma_1(\theta) < 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma_1(\theta) \in (-a, 0) \subseteq [-a, 0]$$

También:

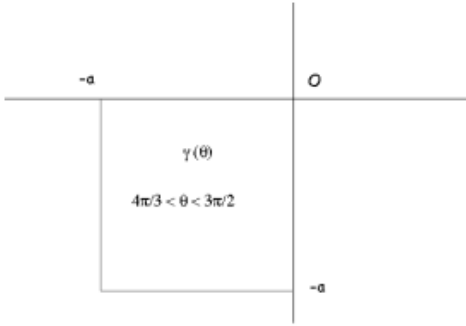
$$\frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} 4\pi < 3\theta < \frac{9\pi}{2} \\ \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \operatorname{sen}(3\theta) < 1 \\ -1 < \operatorname{sen}(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < a \operatorname{sen}(3\theta) < a \\ 0 < -\operatorname{sen}(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < -a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) < a \Rightarrow -a < a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) < 0 \Rightarrow \gamma_2(\theta) \in (-a, 0)$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma_2(\theta) \in (-a, 0) \subseteq [-a, 0]$$

Tenemos así:



$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow \\ (\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta)) &\in [-a, 0] \times [-a, 0] \\ \Rightarrow \gamma(\theta) &\in [-a, 0] \times [-a, 0] \end{aligned}$$

Si ahora tomamos:

$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right),$$

Tendremos:

De un lado:

$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} < 3\theta < 5\pi \\ \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \operatorname{sen}(3\theta) < 1 \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a \operatorname{sen}(3\theta) < a \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) < a \Rightarrow 0 < \gamma_1(\theta) < a$$

i.e:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \gamma_1(\theta) \in (0, a) \subseteq [0, a]$$

Y de otro lado:

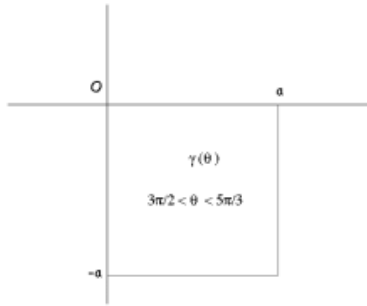
$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} \frac{9\pi}{2} < 3\theta < 5\pi \\ \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < \text{sen}(3\theta) < 1 \\ -1 < \text{sen}(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 < a \text{sen}(3\theta) < a \\ 0 < -\text{sen}(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < -a \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\theta) < a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -a < a \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\theta) < 0 \Rightarrow -a < \gamma_2(\theta) < 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \gamma_2(\theta) \in (-a, 0) \subseteq [-a, 0]$$



Luego:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right), \\ (\gamma_1(\theta), \gamma_2(\theta)) \in [0, a] \times [-a, 0] \\ \Rightarrow \gamma(\theta) \in [0, a] \times [-a, 0] \end{aligned}$$

Para estudiar el crecimiento de la curva γ , vamos a volver a estudiar los signos de las funciones $\gamma'_1(\theta)$ y $\gamma'_2(\theta)$, ahora en el intervalo $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \gamma'_1(\theta) = a \text{sen}(3\theta) \cos(\theta) \\ \gamma'_2(\theta) = a \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\theta) \end{cases}$$

Funciones, ya sabemos, derivables en nuestro intervalo, y además:

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \gamma'_1(\theta) = 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \text{sen}(3\theta) \text{sen}(\theta) \\ \gamma'_2(\theta) = 3a \cos(3\theta) \text{sen}(\theta) + a \text{sen}(3\theta) \cos(\theta) \end{cases}$$

Y si volvemos a repetir las mismas operaciones que hicimos para la curva α (el primer pétalo de nuestra rosa), tendremos:

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \begin{cases} \gamma'_1(\theta) = 3a \cos^4(\theta) - 12a \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \text{sen}^4(\theta) \\ \gamma'_2(\theta) = 2a \text{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \text{sen}^2(\theta)] \end{cases}$$

Vamos a empezar estudiando el signo de la función $\gamma'_1(\theta)$.

Ocurre lo siguiente:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \text{ y } \gamma'_1(\theta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ \gamma'_1(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) < \text{tg}(\theta) \\ \text{y} \\ \gamma'_1(\theta) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) < \text{tg}(\theta) \\ \text{y} \\ 3a \cos^4(\theta) - 12a \text{sen}^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \text{sen}^4(\theta) = 0 \end{cases}$$

Como además, si $\theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$, $\cos(\theta) \neq 0$, entonces:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} tg\left(\frac{\pi}{3}\right) < tg(\theta) \\ y \\ \frac{3a \cos^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} - \frac{12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{a \cos^4(\theta)} + \frac{a \sin^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{3} < tg(\theta) \\ y \\ 3 - 12 tg^2(\theta) + tg^4(\theta) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} tg(\theta) > \sqrt{3} \\ y \\ tg^2(\theta) = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 12}}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} tg(\theta) > \sqrt{3} \\ y \\ tg^2(\theta) = 6 \pm \sqrt{33} \end{array} \right. \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} tg(\theta) > \sqrt{3} \\ y \\ tg(\theta) = \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{33}} \end{array} \right. \Rightarrow tg(\theta) = \sqrt{6 + \sqrt{33}}
 \end{aligned}$$

Tenemos así:

$$Si \ \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \ y \ \gamma'_1(\theta) = 0 \Rightarrow tg(\theta) = \sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

Observemos ahora lo siguiente:

Si nos fijamos ahora en la función:

$$\begin{aligned}
 & tg: \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \\
 & \theta \rightarrow tg(\theta)
 \end{aligned}$$

Sabemos que se trata de una función continua y estrictamente creciente en el intervalo $\left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$, para la que se cumple:

$$\lim_{\theta \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^-} tg(\theta) = +\infty$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 & Dado \ M = \sqrt{6 + \sqrt{33}} > 0, \quad \exists \ \delta > 0, \quad \forall \ \theta \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right), \\
 & \left|\theta - \frac{3\pi}{2}\right| < \delta \Rightarrow tg(\theta) > \sqrt{6 + \sqrt{33}}
 \end{aligned}$$

Si fijamos entonces un:

$$\theta_0 \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \left|\theta_0 - \frac{3\pi}{2}\right| < \delta$$

Y consideramos la función:

$$\begin{aligned}
 & tg: \left[\frac{4\pi}{3}, \theta_0\right] \rightarrow \mathbb{R} \\
 & \theta \rightarrow tg(\theta)
 \end{aligned}$$

Tendremos una función continua y estrictamente creciente en $\left[\frac{4\pi}{3}, \theta_0\right]$, para la que se cumple:

$$tg\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad y \quad tg(\theta_0) > \sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

En virtud entonces del teorema de los valores intermedios, y por la inyectividad de nuestra función, podemos asegurar que:

$$\exists ! \ \theta_5 \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_0\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad tg(\theta_5) = \sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

Si nos fijamos en tal $\theta_5 \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right)$, ocurre para él:

$$\begin{aligned}
 tg(\theta_5) &= \sqrt{6 + \sqrt{33}} \Rightarrow \left(tg(\theta_5) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) = 0 \Rightarrow \\
 &\left(tg(\theta_5) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta_5) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta_5) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta_5) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) = 0 \\
 &\Rightarrow \left(tg^2(\theta_5) - (6 + \sqrt{33})\right)\left(tg^2(\theta_5) - (6 - \sqrt{33})\right) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow tg^4(\theta_5) - (6 - \sqrt{33})tg^2(\theta_5) - (6 + \sqrt{33})tg^2(\theta_5) + (36 - 33) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow tg^4(\theta_5) - 12tg^2(\theta_5) + 3 = 0 \Rightarrow a \cos^4(\theta_5)[tg^4(\theta_5) - 12tg^2(\theta_5) + 3] = 0 \\
 &\Rightarrow a \cos^4(\theta_5)tg^4(\theta_5) - 12a \cos^4(\theta_5)tg^2(\theta_5) + 3a \cos^4(\theta_5) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a \sin^4(\theta_5) - 12a \sin^2(\theta_5) \cos^2(\theta_5) + 3a \cos^4(\theta_5) = 0 \Rightarrow \gamma'_1(\theta_5) = 0
 \end{aligned}$$

Tenemos por tanto, en resumen:

$$\begin{aligned}
 Si \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad entonces: \\
 \gamma'_1(\theta) = 0 \leftrightarrow \theta = \theta_5 = \arctg\left(\sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)
 \end{aligned}$$

Ocorre además lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Si \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right) &= \left(\frac{4\pi}{3}, \arctg\left(\sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \theta < \theta_5 &\Rightarrow tg\left(\frac{4\pi}{3}\right) < tg(\theta) < tg(\theta_5) = \sqrt{6 + \sqrt{33}} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \sqrt{3} < tg(\theta) < \sqrt{6 + \sqrt{33}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\sqrt{6 + \sqrt{33}} < -\sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{6 - \sqrt{33}} < \sqrt{3} < tg(\theta) < \sqrt{6 + \sqrt{33}} &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) > 0 &\quad \left(tg(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) > 0 \\
 \left(tg(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) > 0 &\quad \left(tg(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) < 0
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 &\left(tg(\theta) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) < 0 \Rightarrow \\
 &\left(tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33})\right)\left(tg^2(\theta) - (6 - \sqrt{33})\right) < 0 \Rightarrow \\
 &tg^4(\theta) - (6 - \sqrt{33})tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33})tg^2(\theta) + (36 - 33) < 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3 < 0$$

Como además:

$$a \cos^4(\theta) > 0$$

Tendremos:

$$a \cos^4(\theta) tg^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) tg^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \sin^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0$$

Y si tomamos:

$$\theta \in \left(\theta_5, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(\arctan\left(\sqrt{6+\sqrt{33}}\right), \frac{3\pi}{2}\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_5 < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow tg(\theta_5) < tg(\theta) \Rightarrow \sqrt{6+\sqrt{33}} < tg(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\sqrt{6+\sqrt{33}} < -\sqrt{6-\sqrt{33}} < \sqrt{6-\sqrt{33}} < \sqrt{6+\sqrt{33}} < tg(\theta)$$

$$\Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6+\sqrt{33}}\right) > 0 \quad \left(tg(\theta) + \sqrt{6-\sqrt{33}}\right) > 0$$

$$\left(tg(\theta) - \sqrt{6-\sqrt{33}}\right) > 0 \quad \left(tg(\theta) - \sqrt{6+\sqrt{33}}\right) > 0$$

Entonces:

$$\left(tg(\theta) + \sqrt{6+\sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta) + \sqrt{6-\sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta) - \sqrt{6-\sqrt{33}}\right)\left(tg(\theta) - \sqrt{6+\sqrt{33}}\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(tg^2(\theta) - (6+\sqrt{33})\right)\left(tg^2(\theta) - (6-\sqrt{33})\right) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^4(\theta) - (6-\sqrt{33})tg^2(\theta) - (6+\sqrt{33})tg^2(\theta) + (36-33) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg^4(\theta) - 12tg^2(\theta) + 3 > 0$$

Como también:

$$a \cos^4(\theta) > 0$$

Tendremos:

$$a \cos^4(\theta) tg^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) tg^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \sin^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\theta_5, \frac{3\pi}{2}\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0$$

En resumen, tenemos hasta ahora:

$$\begin{cases} \text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0 \\ \text{Si } \theta \in \left(\theta_5, \frac{3\pi}{2}\right) \subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0 \end{cases}$$

$$y \quad \gamma'_1(\theta_5) = 0$$

Vamos a estudiar ahora lo que ocurre en el intervalo: $\left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \quad y \quad \gamma'_1(\theta) = 0, \quad \text{tendremos:}$$

$$\begin{cases} \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3} \\ y \\ \gamma'_1(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) < tg\left(\frac{5\pi}{3}\right) \\ y \\ 3a \cos^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + a \sin^4(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) < tg\left(\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \\ y \\ \frac{3a \cos^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} - \frac{12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta)}{a \cos^4(\theta)} + \frac{a \sin^4(\theta)}{a \cos^4(\theta)} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) < tg\left(\frac{2\pi}{3}\right) \\ y \\ 3 - 12 tg^2(\theta) + tg^4(\theta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) < tg\left(\frac{2\pi}{3} - \pi\right) \\ y \\ tg^2(\theta) = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 12}}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) < tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \\ y \\ tg^2(\theta) = 6 \pm \sqrt{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tg(\theta) < -\sqrt{3} \\ y \\ tg(\theta) = \pm \sqrt{6 \pm \sqrt{33}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow tg(\theta) = -\sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \quad y \quad \gamma'_1(\theta) = 0 \Rightarrow tg(\theta) = -\sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

Observemos de otro lado que si tomamos la función:

$$tg: \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right] \rightarrow \mathbb{R} \\ \theta \rightarrow tg(\theta)$$

Sabemos que se trata de una función estrictamente creciente y continua en $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right]$, para la que además ocurre:

$$\lim_{\theta \rightarrow \left(\frac{3\pi}{2}\right)^+} tg(\theta) = -\infty$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Dado } \sqrt{6 + \sqrt{33}} > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \forall \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right], \\ \left|\theta - \frac{3\pi}{2}\right| < \delta \Rightarrow tg(\theta) < -\sqrt{6 + \sqrt{33}} \end{aligned}$$

Si fijamos entonces tal $\delta > 0$ y consideramos: $\theta_0 \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right], \quad \left|\theta_0 - \frac{3\pi}{2}\right| < \delta$

Basta considerar la función:

$$\begin{aligned} tg: \left[\theta_0, \frac{5\pi}{3}\right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\rightarrow tg(\theta) \end{aligned}$$

Para tener una función estrictamente creciente y continua en $\left[\theta_0, \frac{5\pi}{3}\right]$, para la que además:

$$tg(\theta_0) < -\sqrt{6 + \sqrt{33}} \quad y \quad tg\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} > -\sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

En virtud entonces del resultado de los valores intermedios y de la inyectividad de nuestra función, podemos asegurar que:

$$\exists ! \theta_6 \in \left(\theta_0, \frac{5\pi}{3}\right), \quad tg(\theta_6) = -\sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

Luego:

$$\exists ! \theta_6 \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad tg(\theta_6) = -\sqrt{6 + \sqrt{33}}$$

Y para tal $\theta_6 \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right)$, tendremos entonces:

$$\begin{aligned} tg(\theta_6) &= -\sqrt{6 + \sqrt{33}} \Rightarrow \left(tg(\theta_6) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(tg(\theta_6) + \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) \left(tg(\theta_6) - \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \left(tg(\theta_6) + \sqrt{6 - \sqrt{33}}\right) \left(tg(\theta_6) - \sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) &= 0 \\ \Rightarrow \left(tg^2(\theta_6) - (6 + \sqrt{33})\right) \left(tg^2(\theta_6) - (6 - \sqrt{33})\right) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow tg^4(\theta_6) - (6 - \sqrt{33}) tg^2(\theta_6) - (6 + \sqrt{33}) tg^2(\theta_6) + (36 - 33) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow tg^4(\theta_6) - 12 tg^2(\theta_6) + 3 = 0 \Rightarrow a \cos^4(\theta_6) [tg^4(\theta_6) - 12 tg^2(\theta_6) + 3] &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \cos^4(\theta_6) tg^4(\theta_6) - 12a \cos^4(\theta_6) tg^2(\theta_6) + 3a \cos^4(\theta_6) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow a \sin^4(\theta_6) - 12a \sin^2(\theta_6) \cos^2(\theta_6) + 3a \cos^4(\theta_6) &= 0 \Rightarrow \gamma'_1(\theta_6) = 0 \end{aligned}$$

Resumiendo, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \text{entonces:} \\ \gamma'_1(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_6 = \arctg\left(-\sqrt{6 + \sqrt{33}}\right) \end{aligned}$$

Si tomamos ahora:

$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \theta_6\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, \arctg\left(-\sqrt{6 + \sqrt{33}}\right)\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \text{tendremos:}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{3\pi}{2} < \theta < \theta_6 &\Rightarrow \overline{tg(\theta)} < \overline{tg(\theta_6)} \Rightarrow tg(\theta) < -\sqrt{6+\sqrt{33}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow tg(\theta) < -\sqrt{6+\sqrt{33}} < -\sqrt{6-\sqrt{33}} < \sqrt{6-\sqrt{33}} < \sqrt{6+\sqrt{33}} &\Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) < 0 &\quad \left(tg(\theta) + \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) < 0 \\
 \left(tg(\theta) - \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) < 0 &\quad \left(tg(\theta) - \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) < 0 \\
 \Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) + \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(tg^2(\theta) - (6+\sqrt{33}) \right) \left(tg^2(\theta) - (6-\sqrt{33}) \right) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow tg^4(\theta) - (6-\sqrt{33}) tg^2(\theta) - (6+\sqrt{33}) tg^2(\theta) + (36-33) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3 > 0 \Rightarrow a \cos^4(\theta) [tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3] > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow a \cos^4(\theta) tg^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) tg^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow \\
 \Rightarrow a \operatorname{sen}^4(\theta) - 12a \operatorname{sen}^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) > 0 \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$Si \ \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \theta_6 \right) \subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0$$

Y si tomamos:

$$\begin{aligned}
 \theta \in \left(\theta_6, \frac{5\pi}{3} \right) &= \left(\arctan \left(-\sqrt{6+\sqrt{33}} \right), \frac{5\pi}{3} \right) \subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right), \quad \text{tenemos:} \\
 \theta_6 < \theta < \frac{5\pi}{3} &\Rightarrow tg(\theta_6) < tg(\theta) < tg\left(\frac{5\pi}{3}\right) = tg\left(\frac{5\pi}{3} - 2\pi\right) = tg\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -tg\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
 &\Rightarrow -\sqrt{6+\sqrt{33}} < tg(\theta) < -\sqrt{3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow -\sqrt{6+\sqrt{33}} < tg(\theta) < -\sqrt{3} < -\sqrt{6-\sqrt{33}} < \sqrt{6-\sqrt{33}} < \sqrt{6+\sqrt{33}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) > 0 &\quad \left(tg(\theta) + \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) < 0 \\
 \left(tg(\theta) - \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) < 0 &\quad \left(tg(\theta) - \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) < 0 \\
 \Rightarrow \left(tg(\theta) + \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) + \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6-\sqrt{33}} \right) \left(tg(\theta) - \sqrt{6+\sqrt{33}} \right) < 0 \\
 \Rightarrow \left(tg^2(\theta) - (6+\sqrt{33}) \right) \left(tg^2(\theta) - (6-\sqrt{33}) \right) < 0 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow tg^4(\theta) - (6 - \sqrt{33}) tg^2(\theta) - (6 + \sqrt{33}) tg^2(\theta) + (36 - 33) < 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3 < 0 \Rightarrow a \cos^4(\theta) [tg^4(\theta) - 12 tg^2(\theta) + 3] < 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a \cos^4(\theta) tg^4(\theta) - 12a \cos^4(\theta) tg^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow a \sin^4(\theta) - 12a \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) + 3a \cos^4(\theta) < 0 \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$Si \ \theta \in \left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right) \subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0$$

Por último:

$$\gamma'_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 3a \cos^4\left(\frac{3\pi}{2}\right) - 12a \sin^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) \cos^2\left(\frac{3\pi}{2}\right) + a \sin^4\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a(-1)^4 = a$$

i.e.,

$$\gamma'_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a > 0$$

Tenemos en resumen, para el signo de $\gamma'_1(\theta)$, lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 Si \ \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right) &\subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0 \\
 Si \ \theta \in \left(\theta_5, \frac{3\pi}{2}\right) &\subseteq \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0 \\
 &\gamma'_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = a > 0 \\
 Si \ \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \theta_6\right) &\subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) > 0 \\
 Si \ \theta \in \left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right) &\subseteq \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \gamma'_1(\theta) < 0 \\
 &\gamma'_1(\theta_5) = 0 = \gamma'_1(\theta_6) \\
 Siendo: \ \theta_5 \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right), \quad tg(\theta_5) &= \sqrt{6 + \sqrt{33}} \quad y \\
 \theta_6 \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad tg(\theta_6) &= -\sqrt{6 + \sqrt{33}}
 \end{aligned}$$

Lo podemos expresar en la siguiente tabla:

	$\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right)$	$\left(\theta_5, \frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2}, \theta_6\right)$	$\left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right)$
$\gamma'_1(\theta)$	—	+	+	—

$$y \ \gamma'_1(\theta_5) = 0 ; \ \gamma'_1(\theta_6) = 0$$

Vamos a intentar ahora hacer lo mismo con el signo de $\gamma'_2(\theta)$

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \gamma'_2(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)]$$

Observemos antes de nada lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow \frac{4\pi}{3} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{4\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \sqrt{3} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) < \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow 3 < \operatorname{tg}^2(\theta) \Rightarrow \frac{3}{5} < 3 < \operatorname{tg}^2(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{3}{5} < \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) < 5 \operatorname{sen}^2(\theta) \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0$$

También:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta = \frac{3\pi}{2} &\Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \cos^2(\theta) = 0 \\ 5 \operatorname{sen}^2(\theta) = 5 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) = 0 - 5 = -5 < 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0$$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) &\Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < \frac{5\pi}{3} \Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) < \operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}(\theta) < \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} < -\operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow 3 < \operatorname{tg}^2(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{3}{5} < 3 < \operatorname{tg}^2(\theta) = \frac{\operatorname{sen}^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) < 5 \operatorname{sen}^2(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0$$

Ocorre, como vemos que:

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) < 0$$

En particular:

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad 3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta) \neq 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad &\text{tendremos:} \\ \gamma_2'(\theta) = 0 &\Leftrightarrow 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \operatorname{sen}^2(\theta)] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2a \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \text{ó} \\ \cos(\theta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Si notamos entonces por $\theta_7 = \frac{3\pi}{2}$, tendremos:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \text{ entonces:}$$

$$\gamma'_2(\theta) = 0 \leftrightarrow \theta = \theta_7 = \frac{3\pi}{2}$$

Además:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_7\right) = \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ entonces:}$$

De un lado ya sabemos que:

$$3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta) < 0$$

Y de otro lado:

$$\begin{cases} -1 < \sin(\theta) < 0 \\ y \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow 2a \sin(\theta) \cos(\theta) > 0$$

Por tanto:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \theta_7\right) \Rightarrow \gamma'_2(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] < 0$$

Y:

$$\text{Si } \theta \in \left(\theta_7, \frac{5\pi}{3}\right) = \left(\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}\right), \text{ entonces:}$$

Sigue ocurriendo de un lado, que:

$$3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta) < 0$$

Pero ahora:

$$\begin{cases} \sin(\theta) < 0 \\ y \\ \cos(\theta) > 0 \end{cases} \Rightarrow 2a \sin(\theta) \cos(\theta) < 0$$

Por lo que tendremos:

$$\text{Si } \theta \in \left(\theta_7, \frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow \gamma'_2(\theta) = 2a \sin(\theta) \cos(\theta) [3 \cos^2(\theta) - 5 \sin^2(\theta)] > 0$$

Para el signo de $\gamma'_2(\theta)$, podemos hacer entonces la siguiente tabla:

	$\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_7\right)$	$\left(\theta_7, \frac{5\pi}{3}\right)$
$\gamma'_2(\theta)$	—	+

$$y \quad \gamma'_2(\theta_7) = \gamma'_2\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

De donde deducimos:

γ_2 es una función estrictamente decreciente en $\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_7\right)$

γ_2 es una función estrictamente creciente en $\left(\theta_7, \frac{5\pi}{3}\right)$

en $\theta_7 = \frac{3\pi}{2}$ la función $\gamma_2(\theta)$ alcanza un mínimo relativo, y la curva γ también.

$\gamma_2(\theta_7)$ es un punto de la curva donde la tangente es horizontal

Para el crecimiento ó decrecimiento de la curva γ , podemos hacer ahora la siguiente tabla:

	$\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right)$	(θ_5, θ_7)	(θ_7, θ_6)	$\left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right)$
$\gamma'_1(\theta)$	—	+	+	—
$\gamma'_2(\theta)$	—	—	+	+
$\gamma'_1(\theta) \cdot \gamma'_2(\theta)$	+	—	+	—

Tenemos según los resultados estudiados anteriormente, que:

La curva γ es estrictamente creciente en $\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right)$

La curva γ es estrictamente decreciente en (θ_5, θ_7)

La curva γ es estrictamente creciente en (θ_7, θ_6)

La curva γ es estrictamente decreciente en $\left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right)$

γ tiene puntos de tangente vertical en $\gamma(\theta_5)$ y $\gamma(\theta_6)$

γ tiene un punto de tangente horizontal en $\gamma(\theta_7)$ donde además alcanza un mínimo relativo.

Nos queda por último estudiar la concavidad o convexidad de nuestra curva.

Las funciones $\gamma'_1(\theta)$ y $\gamma'_2(\theta)$ resultan ser funciones derivables en $\left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$ y además para ellas se tiene:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \\ \gamma''_1(\theta) &= -3a \operatorname{sen}(3\theta) 3 \cos(\theta) - 3a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \\ &\quad - (a \cos(3\theta) 3 \operatorname{sen}(\theta) + a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta)) = \\ &= -9a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) - 3a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) - \\ &\quad - 3a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) - a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) = \\ &= -10a \operatorname{sen}(3\theta) \cos(\theta) - 6a \cos(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \gamma''_2(\theta) &= -3a \operatorname{sen}(3\theta) 3 \operatorname{sen}(\theta) + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) + \\ &\quad + a \cos(3\theta) 3 \cos(\theta) - a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) = \\ &= -9a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) + \\ &\quad + 3a \cos(3\theta) \cos(\theta) - a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) = \\ &= -10a \operatorname{sen}(3\theta) \operatorname{sen}(\theta) + 6a \cos(3\theta) \cos(\theta) \end{aligned}$$

Repitiendo las operaciones realizadas para la curva α , volvemos a obtener que:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \\ \gamma'_1(\theta) \gamma''_2(\theta) - \gamma'_2(\theta) \gamma''_1(\theta) &= 18 a^2 \cos^2(3\theta) + 10 a^2 \operatorname{sen}^2(3\theta) \end{aligned}$$

Y por tanto:

$$\forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \gamma'_1(\theta) \gamma''_2(\theta) - \gamma'_2(\theta) \gamma''_1(\theta) > 0$$

Si pretendemos estudiar el signo de:

$$\frac{\gamma_1'(\theta)\gamma_2''(\theta) - \gamma_1''(\theta)\gamma_2'(\theta)}{(\gamma_1'(\theta))^3}, \quad \forall \theta \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \theta \neq \theta_5, \quad \theta \neq \theta_6$$

Podemos hacer ahora la siguiente tabla:

	$\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right)$	(θ_5, θ_6)	$\left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right)$
$(\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1'')(\theta)$	+	+	+
$(\gamma_1'(\theta))^3$	-	+	-
$\frac{(\gamma_1'\gamma_2'' - \gamma_2'\gamma_1'')(\theta)}{(\gamma_1'(\theta))^3}$	-	+	-

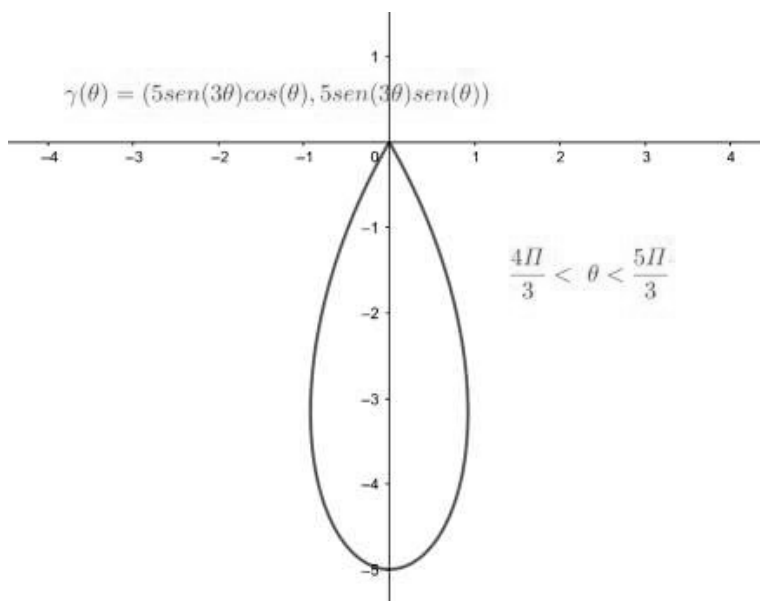
Según el resultado 3.22, estamos en condiciones de asegurar que:

La curva γ es cóncava en $\left(\frac{4\pi}{3}, \theta_5\right)$

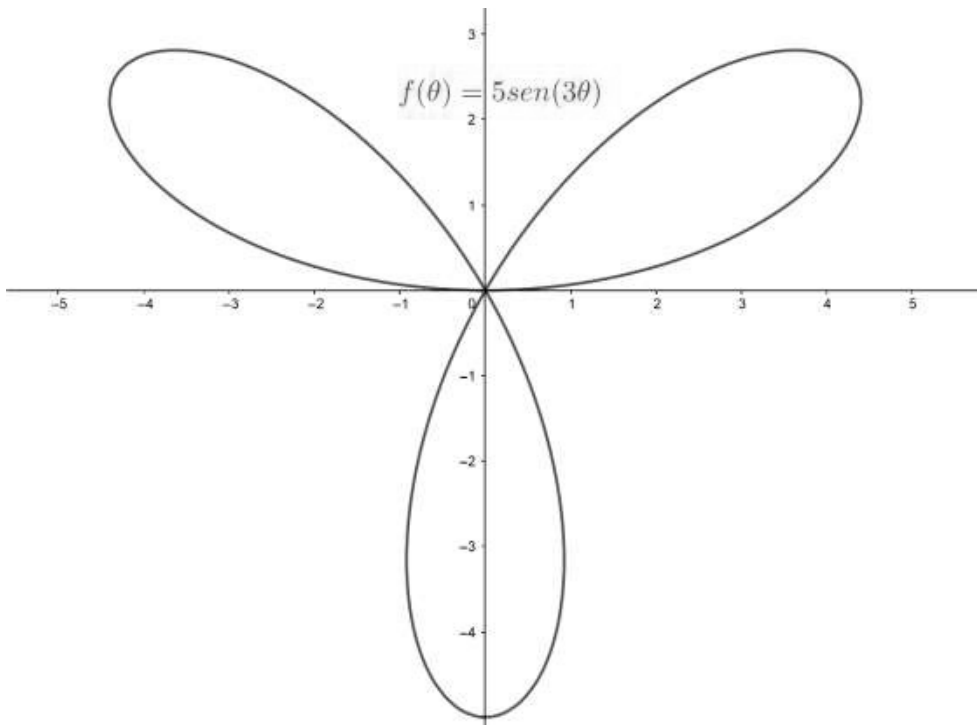
La curva γ es convexa en (θ_5, θ_6)

La curva γ es cóncava en $\left(\theta_6, \frac{5\pi}{3}\right)$

Con todo lo anterior, estamos ya en condiciones de hacer un esbozo de la traza de la curva γ (tercer pétalo de la rosa de tres pétalos).



La representación cartesiana de la gráfica de f en coordenadas polares (la rosa de tres pétalos al completo) quedaría de la siguiente manera:



4.8 Curvas asociadas al problema de los dos cuerpos

El problema básico de la mecánica celeste es el que considera un sistema compuesto por dos partículas que interactúan mutuamente bajo la acción gravitatoria y que no sufre ninguna acción externa. El conocido como “problema de los dos cuerpos” es el que consiste en realizar una descripción completa del movimiento de cada uno de ellos.

Con este planteamiento del problema y teniendo en cuenta algunas consideraciones físicas sobre el campo gravitatorio, como por ejemplo que se trata de un campo central y conservativo, se llega a la conclusión (no es objetivo de este texto hacer tal desarrollo) de que la trayectoria que describe una partícula alrededor de la otra, sobre la que se sitúa el origen del sistema de referencia, viene regida, en coordenadas polares, por una ecuación diferencial lineal, cuyas soluciones tienen la forma:

$$f(\theta) = \frac{\frac{l^2}{k}}{1 + \frac{A l^2}{k} \cos(\theta - \theta_0)}$$

Siendo: l el módulo del momento de inercia del sistema.

$k = G (m_1 + m_2)$, con G la constante de gravitación universal, m_1 y m_2 las masas de las partículas que intervienen.

A y θ_0 son constantes de integración que dependen del momento inicial del sistema y para los que podemos hacer la suposición, sin pérdida de generalidad, de que $A \geq 0$.

Si notamos por:

$$p = \frac{l^2}{k}, \quad e = \frac{A l^2}{k} = A p$$

Y pensamos para simplificar, que: $\theta_0 = 0$, podemos escribir nuestra función en la forma:

$$f(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad (p, e \geq 0)$$

Bien, pues vamos a estudiar en este apartado las posibles trayectorias que puede describir una de las partículas alrededor de la otra, en otras palabras, vamos a intentar estudiar, según los valores de " p " y " e ", cuando f es en realidad una función en el plano polar y que curva genera en el plano cartesiano.

Pueden darse en principio los siguientes casos:

$$\begin{aligned} e &= 0 \\ 0 &< e < 1 \\ e &= 1 \\ e &> 1 \end{aligned}$$

Vamos a estudiar con detenimiento cada uno de ellos:

4.8.1 Caso en que $e = 0$

Para $e = 0$, nos queda la trayectoria:

$$f(\theta) = \frac{p}{1 + 0 \cos(\theta)} = \frac{p}{1} = p$$

Con $p = \frac{l^2}{k} = cte$ que depende del sistema ($p > 0$)

Si consideramos entonces:

$$\begin{aligned} f: (0, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = p \end{aligned}$$

Ocurre sin duda que f es una función, cuya gráfica en coordenadas polares será:

$$graf_{pol}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\} = \{(p, \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\}$$

La representación cartesiana de la gráfica de f en coordenadas polares:

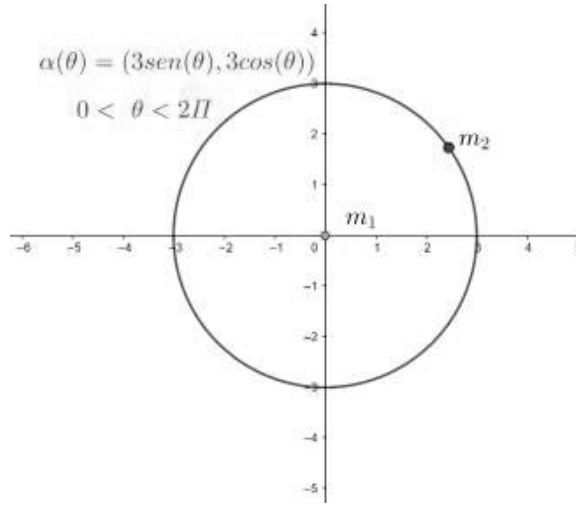
$$\psi(graf_{pol}(f)) = \{(p \cos(\theta), p \sin(\theta)), \quad \theta \in (0, 2\pi)\}$$

Que es la traza de una curva conocida por nosotros, la hemos estudiado en el ejemplo 4.1. Se trata de la circunferencia de centro el origen de coordenadas $(0,0)$ y radio $p > 0$.

La interpretación física en este caso es que una partícula gira en torno a la otra (que está situada en el origen) describiendo una circunferencia de radio:

$$p = \frac{l^2}{k} = \frac{l^2}{G(m_1 + m_2)} > 0$$

i.e: una partícula se mueve en torno a la otra (situada en el origen), describiendo una circunferencia cuyo radio depende del momento de inercia del sistema (constante por tratarse de un campo central), de la cte. de gravitación universal G y de las masas de las partículas.



4.8.2 Caso en que $0 < e < 1$

Supongamos ahora que $0 < e < 1$ y consideramos la correspondencia:

$$f: (0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

Con $p > 0$.

Sin duda:

$$\text{Si } 0 < e < 1 \Rightarrow \begin{cases} -1 < \cos(\theta) < 1 \\ 0 < e < 1 \end{cases} \Rightarrow -e < e \cos(\theta) < e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1 < -e < e \cos(\theta) < e < 1 \Rightarrow 0 < 1 + e \cos(\theta) \Rightarrow \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

Podemos considerar entonces la gráfica de f en coordenadas polares:

$$\text{graf}_{pol}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\} = \left\{ \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)}, \theta \right), \quad \theta \in (0, 2\pi) \right\}$$

Y su representación cartesiana:

$$\psi(\text{graf}_{pol}(f)) = \left\{ \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \right), \quad \theta \in (0, 2\pi) \right\}$$

Ocurre además lo siguiente:

Por álgebra de funciones continuas, es la función f , una función continua en $(0, 2\pi)$.

Por álgebra de derivadas es f una función derivable en $(0, 2\pi)$ y

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad f'(\theta) = \frac{-p(-e \sin(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p e \sin(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}$$

Función que vuelve a ser continua en $(0, 2\pi)$, nuevamente por álgebra de funciones continuas.

Tenemos así que f es una función de clase 1 en $(0, 2\pi)$, i.e: $f \in C^1(0, 2\pi)$.

Si tomamos entonces la función:

$$\alpha: (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \alpha(\theta) = (f(\theta) \cos(\theta), f(\theta) \sin(\theta))$$

Ya sabemos que ocurre que α es una curva regular plana cuya traza coincide con la representación cartesiana de la gráfica de f en coordenadas polares, i.e:

$$\text{traz}(\alpha) = \psi\left(\text{graf}_{\text{pol}}(f)\right)$$

Vamos a centrarnos ahora en intentar representar la traza de la curva regular plana:

$$\begin{aligned} \alpha: (0, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta \rightarrow \alpha(\theta) &= \left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \sin(\theta) \right) \end{aligned}$$

Con $p > 0$, $0 < e < 1$

Empecemos determinando las regiones por donde se encuentra:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 0 < e \cos(\theta) < e \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 < 1 + e \cos(\theta) < 1 + e \Rightarrow \frac{1}{1+e} < \frac{1}{1+e \cos(\theta)} < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \end{aligned}$$

Entonces, tenemos de un lado:

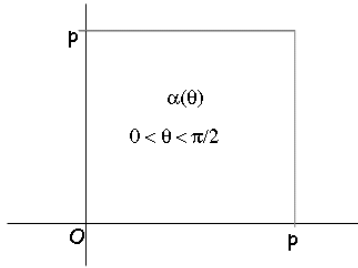
$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{1+e} \cos(\theta) &< \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) &< p \Rightarrow \alpha_1(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p] \end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\frac{p}{1+e} \sin(\theta) < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \sin(\theta) < p \sin(\theta) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) < p \Rightarrow \alpha_2 \in (0, \theta) \subseteq [0, \theta]$$

Luego:

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha(\theta) = (\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)) \in [0, p] \times [0, p]$$

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow -1 < \cos(\theta) < 0 \Rightarrow -e < e \cos(\theta) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - e < 1 + e \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{1}{1 - e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{p}{1 - e}$$

Entonces, tenemos de un lado:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{p}{1 - e} \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \cos(\theta) > \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) > \frac{p}{1 - e} \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{1 - e} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-1) \frac{p}{1 - e} < \frac{p}{1 - e} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{p}{1 - e} < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \alpha_1(\theta) \in \left(-\frac{p}{1 - e}, 0\right) \subseteq \left[-\frac{p}{1 - e}, 0\right]$$

Y de otro:

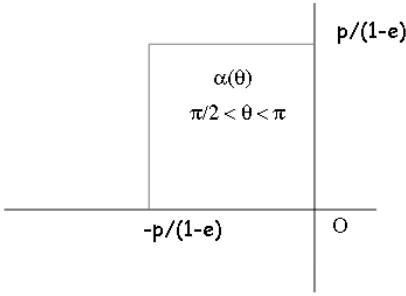
$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \begin{cases} p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{p}{1 - e} \\ 0 < \operatorname{sen}(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \operatorname{sen}(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) < \frac{p}{1 - e} \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow$$

$$0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) < \frac{p}{1 - e} \Rightarrow$$

$$\alpha_2(\theta) \in \left(0, \frac{p}{1 - e}\right) \subseteq \left[0, \frac{p}{1 - e}\right]$$

Luego:



$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow$$

$$\alpha(\theta) \in \left[-\frac{p}{1-e}, 0\right] \times \left[0, \frac{p}{1-e}\right]$$

Para seguir, tendremos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow -1 < \cos(\theta) < 0 \Rightarrow -e < e \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - e < 1 + e \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{1}{1 - e} \Rightarrow \\ &\Rightarrow p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{p}{1 - e} \end{aligned}$$

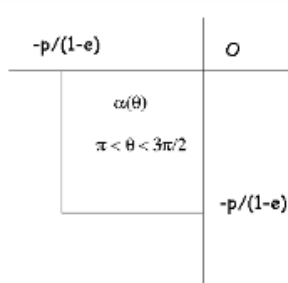
Entonces tendremos de un lado:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow \begin{cases} p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{p}{1 - e} \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \cos(\theta) > \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) > \frac{p}{1 - e} \cos(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{1 - e} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-1) \frac{p}{1 - e} < \frac{p}{1 - e} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{p}{1 - e} < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) \in \left(-\frac{p}{1 - e}, 0\right) \subseteq \left[-\frac{p}{1 - e}, 0\right] \end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) &\Rightarrow \begin{cases} p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < \frac{p}{1 - e} \\ -1 < \sin(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow p \sin(\theta) > \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) > \frac{p}{1 - e} \sin(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{1 - e} \sin(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) < p \sin(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (-1) \frac{p}{1 - e} < \frac{p}{1 - e} \sin(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) < 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \alpha_2(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \in \left(-\frac{p}{1-e}, 0\right) \subseteq \left[-\frac{p}{1-e}, 0\right]$$



Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \alpha(\theta) \in \left[-\frac{p}{1-e}, 0\right] \times \left[-\frac{p}{1-e}, 0\right] \end{aligned}$$

Por último:

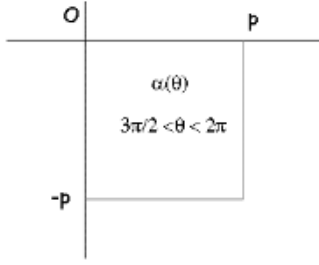
$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 0 < e \cos(\theta) < e \Rightarrow \\ \Rightarrow 1 < 1 + e \cos(\theta) < 1 + e \Rightarrow \frac{1}{1+e} < \frac{1}{1+e \cos(\theta)} < 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \end{aligned}$$

Así, tendremos de un lado:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p}{1+e} \cos(\theta) < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) \Rightarrow \\ \Rightarrow 0 < \frac{p}{1+e} \cos(\theta) < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < p \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p] \end{aligned}$$

Y de otro lado:

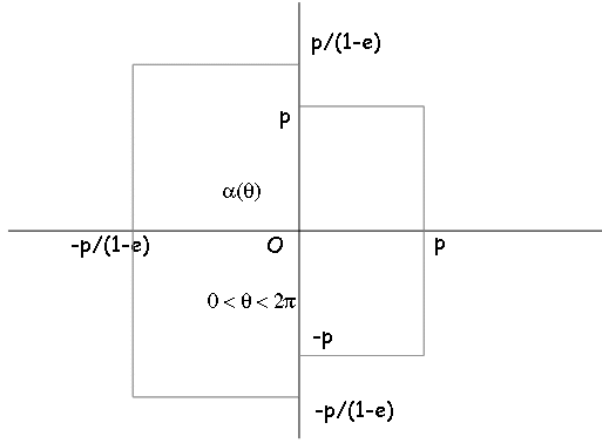
$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \\ -1 < \operatorname{sen}(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p}{1+e} \operatorname{sen}(\theta) > \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) > p \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow \\ \Rightarrow p \operatorname{sen}(\theta) < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) < \frac{p}{1+e} \operatorname{sen}(\theta) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (-1)p < p \operatorname{sen}(\theta) < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) < 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_2(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \in (-p, 0) \subseteq [-p, 0] \end{aligned}$$



Luego:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \\ \alpha(\theta) = (\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)) \in [0, p] \times [-p, 0]$$

La traza de nuestra curva se encuentra, según todo lo anterior, en el recinto delimitado por los segmentos siguientes:



Vamos a seguir ahora intentando estudiar su crecimiento:

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \alpha_1(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta)$$

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \alpha_2(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta)$$

Son α_1 y α_2 funciones derivables en $(0, 2\pi)$, por álgebra de derivadas, y además:

$$\begin{aligned} \forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_1(\theta) &= \frac{-p \sin(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - p \cos(\theta)(-e \sin(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{-p \sin(\theta) - p e \sin(\theta) \cos(\theta) + p e \sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{-p \sin(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \\ \forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_2(\theta) &= \frac{p \cos(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - p \sin(\theta)(-e \sin(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{p \cos(\theta) + p e \cos^2(\theta) + p e \sin^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p \cos(\theta) + p e (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{p \cos(\theta) + p e}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} \end{aligned}$$

i.e., $\forall \theta \in (0, 2\pi)$,

$$\alpha'_1(\theta) = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}$$

$$\alpha'_2(\theta) = \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2}$$

Empecemos estudiando el signo de $\alpha'_1(\theta)$

Observemos en principio, que:

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} > 0$$

Por tanto, si $\theta \in (0, 2\pi)$, entonces:

$$\alpha'_1(\theta) = 0 \leftrightarrow \frac{-p}{(1 + e \cos(\theta))^2} \operatorname{sen}(\theta) = 0 \leftrightarrow \operatorname{sen}(\theta) = 0 \leftrightarrow \theta = \pi$$

i.e., si $\theta \in (0, 2\pi)$, entonces:

$$\alpha'_1(\theta) = 0 \leftrightarrow \theta = \pi$$

Además:

$$\text{Si } \theta \in (0, \pi) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-p}{(1 + e \cos(\theta))^2} < 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-p}{(1 + e \cos(\theta))^2} \operatorname{sen}(\theta) < 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in (0, \pi) \Rightarrow \alpha'_1(\theta) < 0$$

$$\text{Y si } \theta \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-p}{(1 + e \cos(\theta))^2} < 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-p}{(1 + e \cos(\theta))^2} \operatorname{sen}(\theta) > 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in (\pi, 2\pi) \Rightarrow \alpha'_1(\theta) > 0$$

Para el signo de $\alpha'_1(\theta)$ en $(0, 2\pi)$ tenemos por tanto:

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
$\alpha'_1(\theta)$	–	+

De donde deducimos por una consecuencia del T.V.M. de Lagrange, lo siguiente:

α_1 es una función estrictamente decreciente en $(0, \pi)$

α_1 es una función estrictamente creciente en $(\pi, 2\pi)$

También sabemos en esta situación, que α_1 alcanza un mínimo relativo en $\theta_1 = \pi$, y que la curva α , por ser $\alpha'_1(\pi) = 0$, tiene en $\alpha(\pi)$ un punto de tangente vertical.

Sigamos con el signo de $\alpha'_2(\theta)$ en $(0, 2\pi)$. Para estudiarlo, vamos a empezar intentando averiguar cuando $\alpha'_2(\theta) = 0$.

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow e + \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) > 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

$$Y \text{ si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos(\theta) > 0 \Rightarrow e + \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) > 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

Para ver que ocurre en el intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, vamos a proceder como sigue:

La función:

$$g: \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \rightarrow g(\theta) = \cos(\theta)$$

Es una función continua y estrictamente decreciente en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Además ocurre:

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad y \quad g(\pi) = \cos(\pi) = -1$$

Como $0 < e < 1 \Rightarrow 0 > -e > -1 \Rightarrow g(\pi) < -e < g\left(\frac{\pi}{2}\right)$

En virtud del teorema de los valores intermedios y siendo g una función estrictamente decreciente (y por tanto inyectiva) en $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, tendremos que:

$$\exists ! \theta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad g(\theta_2) = -e$$

Para tal $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ ocurrirá:

$$\begin{aligned} \cos(\theta_2) = -e &\Rightarrow e + \cos(\theta_2) = 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta_2))^2} (e + \cos(\theta_2)) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha'_2(\theta_2) = 0 \end{aligned}$$

Además:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) &\Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq \theta < \theta_2 \Rightarrow g\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq g(\theta) > g(\theta_2) \Rightarrow -e < g(\theta) \leq 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < e + g(\theta) \Rightarrow e + \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) > 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

$$Y \text{ si } \theta \in (\theta_2, \pi] \Rightarrow \theta_2 < \theta \leq \pi \Rightarrow g(\theta_2) > g(\theta) \geq g(\pi) \Rightarrow -e > g(\theta) \geq -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -e > \cos(\theta) \Rightarrow 0 > e + \cos(\theta) \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) < 0$$

i.e.,

$$\text{Si } \theta \in (\theta_2, \pi] \Rightarrow \alpha'_2(\theta) < 0$$

Tenemos hasta ahora:

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

$$\text{Si } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

$$\text{Si } \theta \in (\theta_2, \pi] \Rightarrow \alpha'_2(\theta) < 0$$

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

Nos falta por estudiar lo que ocurre en $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. Para ello vamos a tomar ahora la función coseno, pero en otro intervalo. Vamos a considerar la función:

$$h: \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\theta \rightarrow h(\theta) = \cos(\theta)$$

Tenemos ahora una función continua y estrictamente creciente en $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ para la que ocurre:

$$h(\pi) = \cos(\pi) = -1 \quad y \quad h\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

Como: $0 < e < 1 \Rightarrow 0 > -e > -1 \Rightarrow \cos(\pi) < -e < \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Nuevamente por el teorema de los valores intermedios y por ser h inyectiva, podemos asegurar que:

$$\exists ! \theta_3 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad h(\theta_3) = \cos(\theta_3) = -e$$

Para tal $\theta_3 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, tendremos:

$$\cos(\theta_3) = -e \Rightarrow e + \cos(\theta_3) = 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta_3))^2} (e + \cos(\theta_3)) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha'_2(\theta_3) = 0$$

Además:

$$\text{Si } \theta \in [\pi, \theta_3] \Rightarrow \pi \leq \theta < \theta_3 \Rightarrow \cos(\pi) \leq \cos(\theta) < \cos(\theta_3) \Rightarrow -1 < \cos(\theta) < -e$$

$$\Rightarrow e + \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) < 0 \Rightarrow \alpha'_2(\theta) < 0$$

$$\text{Y si } \theta \in \left(\theta_3, \frac{3\pi}{2}\right] \Rightarrow \theta_3 < \theta \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta_3) < \cos(\theta) \leq \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow -e < \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow e + \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) > 0 \Rightarrow \alpha'_2(\theta) > 0$$

Resumiendo todo lo anterior, podemos hacer la siguiente tabla:

	$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left[\frac{\pi}{2}, \theta_2\right)$	$(\theta_2, \pi]$	(π, θ_3)	$\left(\theta_3, \frac{3\pi}{2}\right]$	$\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$
$\alpha'_2(\theta)$	+	+	-	-	+	+

Y en virtud de una consecuencia del T.V.M. de Lagrange podemos asegurar

α_2 es estrictamente creciente en $(0, \theta_2)$

α_2 es estrictamente decreciente en (θ_2, θ_3)

α_2 es estrictamente creciente en $(\theta_3, 2\pi)$

También sabemos que en θ_2 la función α_2 alcanza un máximo relativo. En θ_3 la función α_2 alcanza un mínimo relativo.

Y para la curva α tenemos que:

α tiene en $\alpha(\theta_2)$ y $\alpha(\theta_3)$ puntos de tangente horizontal

α alcanza en $\alpha(\theta_2)$ un máximo relativo

α alcanza en $\alpha(\theta_3)$ un mínimo relativo

Conocidos los signos de las funciones $\alpha'_1(\theta)$ y $\alpha'_2(\theta)$ en $(0, 2\pi)$, para la curva α podemos establecer lo siguiente:

	$(0, \theta_2)$	(θ_2, θ_1)	(θ_1, θ_3)	$(\theta_3, 2\pi)$
$\alpha'_1(\theta)$	—	—	+	+
$\alpha'_2(\theta)$	+	—	—	+
$\alpha'_1(\theta) \alpha'_2(\theta)$	—	+	—	+

Tenemos, según resultados anteriores:

La curva α es decreciente en $(0, \theta_2)$

La curva α es creciente en $(\theta_2, \theta_1) = (\theta_2, \pi)$

La curva α es decreciente en $(\theta_1, \theta_3) = (\pi, \theta_3)$

La curva α es creciente en $(\theta_3, 2\pi)$

Para estudiar ahora su concavidad o convexidad, observemos lo siguiente:

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \begin{cases} \alpha'_1(\theta) = \frac{-p}{(1 + e \cos(\theta))^2} \operatorname{sen}(\theta) \\ \alpha'_2(\theta) = \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^2} (e + \cos(\theta)) \end{cases}$$

Y tanto $\alpha'_1(\theta)$ como $\alpha'_2(\theta)$ son funciones derivables en $(0, 2\pi)$ y $\forall \theta \in (0, 2\pi)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \alpha''_1(\theta) &= \frac{-p \cos(\theta) (1 + e \cos(\theta))^2 + p \operatorname{sen}(\theta) 2 (1 + e \cos(\theta)) (-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) (1 + e \cos(\theta)) - 2pe \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe (1 - \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe + 2pe \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - 2pe + pe \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^3} (e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e) \end{aligned}$$

Y

$$\begin{aligned} \alpha''_2(\theta) &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) (1 + e \cos(\theta))^2 - p (e + \cos(\theta)) 2 (1 + e \cos(\theta)) (-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) (1 + e \cos(\theta)) + 2p (e + \cos(\theta)) e \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2pe^2 \operatorname{sen}(\theta) + 2pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2pe^2 \operatorname{sen}(\theta) - p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} =$$

$$= \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} (e \cos(\theta) + 2e^2 - 1)$$

i.e., las funciones α_1 y α_2 son dos veces derivables en $(0, 2\pi)$ y

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \begin{cases} \alpha_1''(\theta) = \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^3} (e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e) \\ \alpha_2''(\theta) = \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} (e \cos(\theta) + 2e^2 - 1) \end{cases}$$

Ocurre entonces lo siguiente: $\forall \theta \in (0, 2\pi)$,

$$\alpha_1'(\theta) \alpha_2''(\theta) = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} (e \cos(\theta) + 2e^2 - 1) =$$

$$= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} (e \cos(\theta) + 2e^2 - 1) = \frac{-p^2(1 - \cos^2(\theta))(e \cos(\theta) + 2e^2 - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^5}$$

$$= \frac{(-p^2 + p^2 \cos^2(\theta))(e \cos(\theta) + 2e^2 - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^5} =$$

$$= \frac{-p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 + p^2 e \cos^3(\theta) + 2p^2 e^2 \cos^2(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5}$$

$$\alpha_1''(\theta) \alpha_2'(\theta) = \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))^3} (e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e) \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} =$$

$$= \frac{p^2(e + \cos(\theta))(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^5} =$$

$$= \frac{(p^2 e + p^2 \cos(\theta))(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^5} =$$

$$= \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) - p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta) - 2p^2 e \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5}$$

$$= \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5}$$

De donde tendremos:

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \alpha_1'(\theta) \alpha_2''(\theta) - \alpha_1''(\theta) \alpha_2'(\theta) =$$

$$= \frac{-p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 + p^2 e \cos^3(\theta) + 2p^2 e^2 \cos^2(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} -$$

$$- \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2p^2 e \cos(\theta) + p^2 + p^2 e^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{p^2(1 + 2e \cos(\theta) + e^2 \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{p^2(1 + e \cos(\theta))^2}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3}
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall \theta \in (0, 2\pi), \quad \alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta) = \frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3} > 0$$

Si hacemos entonces la siguiente tabla:

	$(0, \pi)$	$(\pi, 2\pi)$
$(\alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha''_1 \alpha'_2)(\theta)$	+	+
$(\alpha'_1(\theta))^3$	-	+
$\frac{(\alpha'_1 \alpha''_2 - \alpha''_1 \alpha'_2)(\theta)}{(\alpha'_1(\theta))^3}$	-	+

Podemos asegurar en virtud de resultados anteriores que:

La curva α es cóncava en $(0, \pi)$

La curva α es convexa en $(\pi, 2\pi)$

Con todo lo anterior podríamos hacer ya un esbozo de nuestra curva, pero vamos a hacer alguna observación más sobre ella.

Fijémonos en los puntos del plano:

$$F(0,0) \quad y \quad F'\left(\frac{-2pe}{1-e^2}, 0\right)$$

Y consideremos un punto arbitrario de nuestra curva:

$$P = \alpha(\theta) = \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \right)$$

Ocurre entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &d(P, F) + d(P, F') = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) \right)^2 + \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \right)^2} \\
 &\quad + \sqrt{\left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) + \frac{2pe}{1 - e^2} \right)^2 + \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \right)^2} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \right)^2 \cos^2(\theta) + \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \right)^2 \sin^2(\theta) +} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} + \frac{4p^2 e \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))(1 - e^2)} + \frac{4p^2 e^2}{(1 - e^2)^2} + \frac{p^2 \sin^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 (\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))} + \\
 &+ \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 (\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta)) + \frac{4p^2 e \cos(\theta)}{(1+e \cos(\theta))(1-e^2)} + \frac{4p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = \\
 &= \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 + \frac{4p^2 e \cos(\theta)}{(1+e \cos(\theta))(1-e^2)} + \frac{4p^2 e^2}{(1-e^2)^2}} = \\
 &= \left| \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \right| + \\
 &+ \sqrt{\frac{p^2}{(1+e \cos(\theta))^2} + \frac{4p^2 e \cos(\theta)(1-e^2) + 4p^2 e^2(1+e \cos(\theta))}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))}} = \\
 &= \frac{p}{1+e \cos(\theta)} + \\
 &+ \sqrt{\frac{p^2}{(1+e \cos(\theta))^2} + \frac{4p^2 e \cos(\theta) - 4p^2 e^3 \cos(\theta) + 4p^2 e^2 + 4p^2 e^3 \cos(\theta)}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))}} = \\
 &= \frac{p}{1+e \cos(\theta)} + \sqrt{\frac{p^2}{(1+e \cos(\theta))^2} + \frac{4p^2 e \cos(\theta) + 4p^2 e^2}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))}} = \\
 &= \frac{p}{1+e \cos(\theta)} + \sqrt{\frac{p^2(1-e^2)^2 + (4p^2 e \cos(\theta) + 4p^2 e^2)(1+e \cos(\theta))}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))^2}} = \\
 &= \frac{p}{1+e \cos(\theta)} + \\
 &+ \sqrt{\frac{p^2(1-2e^2+e^4) + 4p^2 e \cos(\theta) + 4p^2 e^2 \cos^2(\theta) + 4p^2 e^2 + 4p^2 e^3 \cos(\theta)}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))^2}} = \\
 &= \frac{p}{1+e \cos(\theta)} + \\
 &+ \sqrt{\frac{p^2 - 2p^2 e^2 + p^2 e^4 + 4p^2 e \cos(\theta) + 4p^2 e^2 \cos^2(\theta) + 4p^2 e^2 + 4p^2 e^3 \cos(\theta)}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))^2}} = \\
 &= \frac{p}{1+e \cos(\theta)} + \\
 &+ \sqrt{\frac{p^2 + 2p^2 e^2 + p^2 e^4 + 4p^2 e \cos(\theta) + 4p^2 e^2 \cos^2(\theta) + 4p^2 e^3 \cos(\theta)}{(1-e^2)^2(1+e \cos(\theta))^2}} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \\
 &\sqrt{\left(\frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))}\right)^2 (1 + 2e^2 + e^4 + 4e \cos(\theta) + 4e^2 \cos^2(\theta) + 4e^3 \cos(\theta))} \\
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \\
 &+ \left| \frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} \right| \sqrt{1 + 2e^2 + e^4 + 4e \cos(\theta) + 4e^2 \cos^2(\theta) + 4e^3 \cos(\theta)} \\
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \\
 &+ \frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} \sqrt{(1 + e^2 + 2e \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} |1 + e^2 + 2e \cos(\theta)|
 \end{aligned}$$

i.e; tenemos:

$$\begin{aligned}
 &d(P, F) + d(P, F') = \\
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} |1 + e^2 + 2e \cos(\theta)|
 \end{aligned}$$

Pero además ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} -1 \leq \cos(\theta) \leq 1 \\ 0 < e < 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow -e \leq e \cos(\theta) \leq e \Rightarrow -2e \leq 2e \cos(\theta) \leq 2e \Rightarrow \\
 &\Rightarrow e^2 - 2e \leq e^2 + 2e \cos(\theta) \leq e^2 + 2e \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 1 + e^2 - 2e \leq 1 + e^2 + 2e \cos(\theta) \leq 1 + e^2 + 2e \Rightarrow \\
 &\Rightarrow (1 - e)^2 \leq 1 + e^2 + 2e \cos(\theta) \leq (1 + e)^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow 0 \leq (1 - e)^2 \leq 1 + e^2 + 2e \cos(\theta) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow |1 + e^2 + 2e \cos(\theta)| = 1 + e^2 + 2e \cos(\theta)
 \end{aligned}$$

De donde tenemos:

$$\begin{aligned}
 &d(P, F) + d(P, F') = \\
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} |1 + e^2 + 2e \cos(\theta)| = \\
 &= \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} (1 + e^2 + 2e \cos(\theta)) = \\
 &= \frac{p(1 - e^2) + p(1 + e^2 + 2e \cos(\theta))}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} = \frac{p(1 - e^2 + 1 + e^2 + 2e \cos(\theta))}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} = \\
 &= \frac{p(2 + 2e \cos(\theta))}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} = \frac{2p(1 + e \cos(\theta))}{(1 - e^2)(1 + e \cos(\theta))} = \frac{2p}{(1 - e^2)}
 \end{aligned}$$

Descubrimos de esta manera como ocurre que:

$$\forall \theta \in (0, 2\pi),$$

$$d(\alpha(\theta), F) + d(\alpha(\theta), F') = \frac{2p}{1-e^2} = cte.$$

i.e., todos los puntos de nuestra curva se encuentran sobre la **elipse** de focos $F(0,0)$ y $F'(\frac{-2pe}{1-e^2}, 0)$ y de constante: $k = \frac{2p}{1-e^2} > 0$, siendo el foco $F(0,0)$ el lugar que ocupa una de las dos partículas del mencionado problema de los dos cuerpos.

En el estudio del sistema solar, ésta es la conocida **1ª ley de Kepler**, que asegura que todos los planetas del sistema, giran en torno al Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol situado en uno de los focos de dicha elipse.

Si observamos además que el semieje mayor de la elipse es:

$$\text{Semieje Mayor} = \frac{k}{2} = \frac{\frac{2p}{1-e^2}}{2} = \frac{2p}{2(1-e^2)} = \frac{p}{1-e^2}$$

Y la semidistancia focal:

$$\text{Semidistancia focal} = \frac{d(F, F')}{2} = \left| \frac{\frac{-2pe}{1-e^2}}{2} \right| = \left| \frac{-2pe}{2(1-e^2)} \right| = \frac{pe}{(1-e^2)}$$

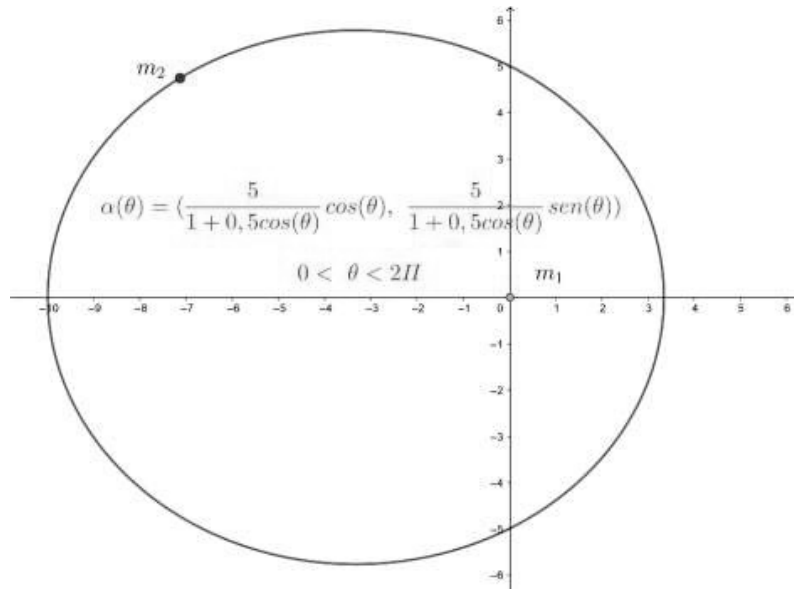
Descubrimos el papel que juega "e" en la expresión de nuestra curva.

Pues la excentricidad de la elipse de la órbita, resulta ser:

$$\text{Excentricidad} = \frac{\text{semidistancia focal}}{\text{semieje mayor}} = \frac{\frac{pe}{1-e^2}}{\frac{p}{1-e^2}} = \frac{pe}{p} = e$$

i.e., la elipse que describe la órbita de una partícula alrededor de la otra, en este caso, tiene excentricidad "e".

Ahora ya si que podemos hacer un esbozo de la traza de nuestra curva:



4.8.3 Caso en que $e = 1$

En el caso en que $e = 1$, la expresión que nos queda para f será:

$$f(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} = \frac{p}{1 + \cos(\theta)}$$

con $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$.

Para que f sea realmente una función en el “plano polar”, debemos considerarla en la forma:

$$\begin{aligned} f: (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Por lo que es conveniente distinguir dos ramas en la trayectoria de la partícula. Notamos así:

$$\begin{aligned} f_1: (0, \pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_1(\theta) = \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \\ f_2: (\pi, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_2(\theta) = \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Por álgebra de funciones continuas, resultan ser f_1 una función continua en el intervalo $(0, \pi)$, y f_2 una función continua en el intervalo $(\pi, 2\pi)$. Además f_1 es derivable en $(0, \pi)$, y se tiene que:

$$\forall \theta \in (0, \pi), \quad f_1'(\theta) = \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2}$$

f_2 es también una función derivable en $(\pi, 2\pi)$, y se tiene que:

$$\forall \theta \in (\pi, 2\pi), \quad f_2'(\theta) = \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2}$$

Y ambas, tanto f_1' como f_2' son funciones continuas en $(0, \pi)$ y $(\pi, 2\pi)$ respectivamente.

Ocurre pues, que $f_1 \in C^1(0, \pi)$ y $f_2 \in C^1(\pi, 2\pi)$.

Sabemos de un resultado anterior que ocurre entonces que la función:

$$\begin{aligned} \alpha: (0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow \alpha(\theta) = (f_1(\theta) \cos(\theta), f_1(\theta) \operatorname{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

es una curva regular plana cuya traza coincide con la representación cartesiana de la gráfica de f_1 en coordenadas polares.

Y por la misma razón, que la función:

$$\begin{aligned} \beta: (\pi, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow \beta(\theta) = (f_2(\theta) \cos(\theta), f_2(\theta) \operatorname{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

es una curva regular plana cuya traza coincide con la representación cartesiana de la gráfica de f_2 en coordenadas polares.

Vamos a intentar representar por tanto las trazas de las curvas α y β , y su unión

$\operatorname{traz}(\alpha) \cup \operatorname{traz}(\beta)$ constituirá la trayectoria de la órbita de una de las partículas en torno a la otra en el problema de los dos cuerpos (para este caso en que $e = 1$).

Empecemos por la curva α .

$$\alpha: (0, \pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \alpha(\theta) = \left(\frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta) \right)$$

Se trata de una curva regular plana, según hemos comentado antes, por ser $f_1 \in C^1(0, \pi)$

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 1 < 1 + \cos(\theta) < 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + \cos(\theta)} < 1 \Rightarrow \frac{p}{2} < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} < p$$

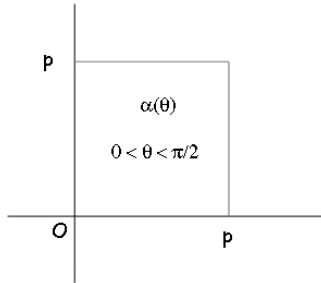
Por lo que ocurrirá, de un lado:

$$\begin{cases} \frac{p}{2} < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} < p \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{2} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \Rightarrow \alpha_1(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p]$$

Y de otro lado:

$$\begin{cases} \frac{p}{2} < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} < p \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{p}{2} \sin(\theta) < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta) < p \sin(\theta) \Rightarrow$$



$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta) < p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_2(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p]$$

i.e:

$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha(\theta) \in [0, p] \times [0, p]$$

Si ahora $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, tendremos:

$$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi \Rightarrow -1 < \cos(\theta) < 0 \Rightarrow 0 < 1 + \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1 + \cos(\theta)}$$

$$\Rightarrow p < \frac{p}{1 + \cos(\theta)}$$

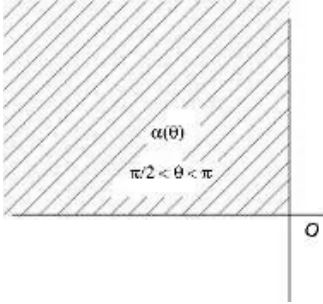
Por lo que ocurrirá:

De un lado:

$$\begin{cases} p < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow p \cos(\theta) > \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1(\theta) < 0 \Rightarrow \alpha_1(\theta) \in (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 0]$$



Y de otro lado:

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} p < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow p \sin(\theta) < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta) \Rightarrow \\
 & \Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \alpha_2(\theta) > 0 \Rightarrow \alpha_2(\theta) \in (0, +\infty) \subseteq [0, +\infty) \\
 & \text{i.e.,} \\
 & \text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \alpha(\theta) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)
 \end{aligned}$$

Para seguir, observemos que la función α_1 es una función derivable en $(0, \pi)$, y que:

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in (0, \pi), \quad \alpha_1'(\theta) &= \frac{-p \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) - p \cos(\theta)(-\sin(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{-p \sin(\theta) - p \sin(\theta) \cos(\theta) + p \sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{-p \sin(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2}
 \end{aligned}$$

Como ocurre que:

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in (0, \pi), \quad & \begin{cases} -p \sin(\theta) < 0 \\ ((1 + \cos(\theta))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{-p \sin(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} < 0 \\
 \Rightarrow \forall \theta \in (0, \pi), \quad & \alpha_1'(\theta) = \frac{-p \sin(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} < 0
 \end{aligned}$$

Y por tanto la función α_1 será una función estrictamente decreciente en el intervalo $(0, \pi)$.

También α_2 es derivable en $(0, \pi)$ y ocurre que:

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in (0, \pi), \quad \alpha_2'(\theta) &= \frac{p \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) - p \sin(\theta)(-\sin(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{p \cos(\theta) + p \cos^2(\theta) + p \sin^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p \cos(\theta) + p(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{p \cos(\theta) + p}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p(1 + \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p}{1 + \cos(\theta)}
 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\forall \theta \in (0, \pi), \quad \alpha_2'(\theta) = \frac{p}{1 + \cos(\theta)} > 0$$

Es así α_2 una función estrictamente creciente en $(0, \pi)$

Tenemos entonces de los dos hechos anteriores:

$$\forall \theta \in (0, \pi), \quad \alpha_1'(\theta) \alpha_2'(\theta) < 0$$

Y por tanto la curva α será estrictamente decreciente en $(0, \pi)$

Para estudiar la concavidad o convexidad, observemos en principio, que las funciones α'_1 y α'_2 son ambas derivables en $(0, \pi)$, y que $\forall \theta \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned}\alpha''_1(\theta) &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + \cos(\theta))^2 + p \operatorname{sen}(\theta)2(1 + \cos(\theta))(-\operatorname{sen}(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) - 2p \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^3} = \frac{-p \cos(\theta) - p \cos^2(\theta) - 2p \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - p \cos^2(\theta) - 2p(1 - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - p \cos^2(\theta) - 2p + 2p \cos^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^3} = \frac{-p \cos(\theta) + p \cos^2(\theta) - 2p}{(1 + \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{p(\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2)}{(1 + \cos(\theta))^3} \\ \alpha''_2(\theta) &= \frac{-p(-\operatorname{sen}(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2}\end{aligned}$$

Tendremos así, que $\forall \theta \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned}\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^4} \\ \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta) &= \frac{p(\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2)}{(1 + \cos(\theta))^3} \frac{p}{(1 + \cos(\theta))} = \\ &= \frac{p^2(\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2)}{(1 + \cos(\theta))^4}\end{aligned}$$

Entonces: $\forall \theta \in (0, \pi)$,

$$\begin{aligned}\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta) &= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^4} - \frac{p^2(\cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2)}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p^2(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2)}{(1 + \cos(\theta))^4} = \frac{-p^2(1 - \cos(\theta) - 2)}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p^2(-1 - \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \frac{p^2(1 + \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \frac{p^2}{(1 + \cos(\theta))^3}\end{aligned}$$

Y por tanto: $\forall \theta \in (0, \pi)$,

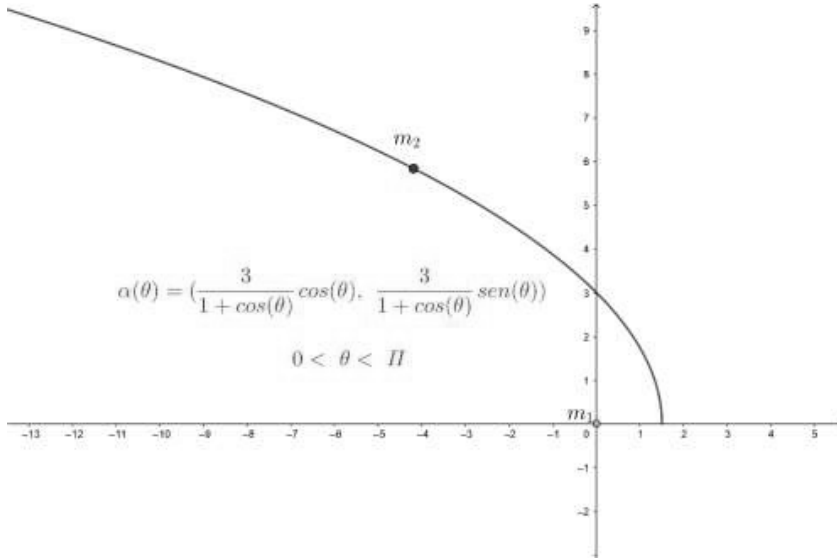
$$\begin{aligned}\frac{\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta)}{(\alpha'_1(\theta))^3} &= \frac{\frac{p^2}{(1 + \cos(\theta))^3}}{\frac{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^6}} = \frac{p^2(1 + \cos(\theta))^6}{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta)(1 + \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-(1 + \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\forall \theta \in (0, \pi), \quad \frac{\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta)}{(\alpha'_1(\theta))^3} = -\frac{(1 + \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)} < 0$$

Y en consecuencia, según un resultado anterior, será α una curva cóncava en $(0, \pi)$.

La traza de nuestra curva, quedaría de la siguiente manera:



Veamos ahora que ocurre con la otra rama, i.e veamos que ocurre con la curva:

$$\beta: (\pi, 2\pi) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \beta(\theta) = \left(\frac{p}{1+\cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1+\cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \right)$$

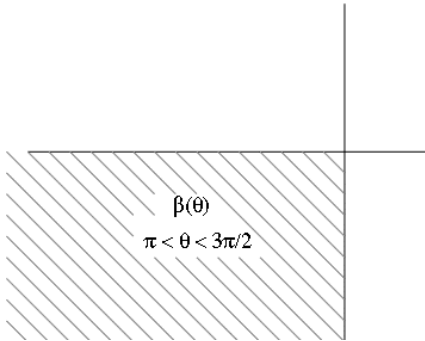
Se trata sin duda de una curva regular plana, por ser $f_2 \in C^1(\pi, 2\pi)$. Además:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right) &\Rightarrow \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -1 < \cos(\theta) < 0 \Rightarrow 0 < 1 + \cos(\theta) < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 < \frac{1}{1 + \cos(\theta)} \Rightarrow p < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Tenemos así, de un lado:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \Rightarrow p \cos(\theta) > \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) \Rightarrow \\ -1 < \cos(\theta) < 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \beta_1(\theta) = \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta_1(\theta) \in (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 0] \end{aligned}$$

Y de otro lado:



$$\begin{cases} p < \frac{p}{1+\cos(\theta)} \\ -1 < \sin(\theta) < 0 \end{cases} \Rightarrow p \sin(\theta) > \frac{p}{1+\cos(\theta)} \sin(\theta) \Rightarrow \beta_2(\theta) < p \sin(\theta) < 0 \\ \Rightarrow \beta_2(\theta) \in (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 0]$$

Luego:

$$\forall \theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \beta(\theta) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$$

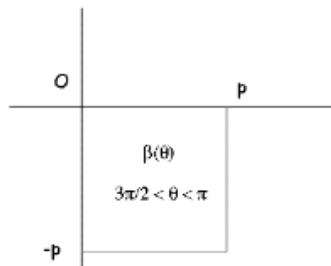
Si ahora tomamos:

$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \text{ tendremos:}$$

$$\begin{aligned} \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi &\Rightarrow 0 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 1 < 1 + \cos(\theta) < 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1 + \cos(\theta)} < 1 \Rightarrow \frac{p}{2} < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} < p \end{aligned}$$

Tendremos entonces, de un lado:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{2} < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} < p \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{array} \right. &\Rightarrow \frac{p}{2} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < \frac{p}{2} \cos(\theta) < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < p \Rightarrow \\ &\Rightarrow \beta_1(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p] \end{aligned}$$



Y de otro lado:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \frac{p}{2} < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} < p \\ -1 < \sin(\theta) < 0 \end{array} \right. &\Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{p}{2} \sin(\theta) > \frac{p \sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} > p \sin(\theta) &\Rightarrow \\ \Rightarrow -p < \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta) < 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow \beta_2(\theta) \in (-p, 0) \subseteq [-p, 0] \end{aligned}$$

Luego:

$$\forall \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \beta(\theta) = (\beta_1(\theta), \beta_2(\theta)) \in [0, p] \times [-p, 0]$$

Para estudiar el crecimiento, observemos en principio que tanto β_1 como β_2 son funciones derivables en $(\pi, 2\pi)$ y que $\forall \theta \in (\pi, 2\pi)$,

$$\beta_1'(\theta) = \frac{-p \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)) - p \cos(\theta)(-\sin(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - p \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + p \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} \\
 \beta_2'(\theta) &= \frac{p \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)(-\operatorname{sen}(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{p \cos(\theta) + p \cos^2(\theta) + p \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p \cos(\theta) + p(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{p + p \cos(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p(1 + \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p}{1 + \cos(\theta)}
 \end{aligned}$$

Tenemos así:

$$\begin{aligned}
 \forall \theta \in (\pi, 2\pi), \quad \beta_1'(\theta) &= -\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} > 0 \\
 \forall \theta \in (\pi, 2\pi), \quad \beta_2'(\theta) &= \frac{p}{1 + \cos(\theta)} > 0
 \end{aligned}$$

Por tanto, deducimos:

β_1 es una función estrictamente creciente en $(\pi, 2\pi)$
 β_2 es una función estrictamente creciente en $(\pi, 2\pi)$

Y como también:

$$\forall \theta \in (\pi, 2\pi), \quad \beta_1'(\theta) \beta_2'(\theta) > 0$$

Entonces:

La curva β es estrictamente creciente en $(\pi, 2\pi)$

Para estudiar la concavidad y convexidad, observemos que las funciones β_1' y β_2' son ambas derivables en $(\pi, 2\pi)$ y $\forall \theta \in (\pi, 2\pi)$,

$$\begin{aligned}
 \beta_1''(\theta) &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + \cos(\theta))^2 + p \operatorname{sen}(\theta)2(1 + \cos(\theta))(-\operatorname{sen}(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\
 &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) - 2p \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^3} = \frac{-p \cos(\theta) - p \cos^2(\theta) - 2p \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{-p \cos(\theta) - p \cos^2(\theta) - 2p(1 - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{-p \cos(\theta) - p \cos^2(\theta) - 2p + 2p \cos^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^3} = \frac{-p(2 + \cos(\theta) - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^3} \\
 \beta_2''(\theta) &= \frac{-p(-\operatorname{sen}(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2}
 \end{aligned}$$

De donde tendremos: $\forall \theta \in (\pi, 2\pi)$,

$$\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^2} = \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^4}$$

$$\begin{aligned} \beta_1''(\theta) \beta_2'(\theta) &= \frac{-p(2 + \cos(\theta) - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^3} \frac{p}{(1 + \cos(\theta))} = \\ &= \frac{-p^2(2 + \cos(\theta) - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} \end{aligned}$$

Entonces: $\forall \theta \in (\pi, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} &\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_1''(\theta) \beta_2'(\theta) = \\ &= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^4} + \frac{p^2(2 + \cos(\theta) - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta) + p^2(2 + \cos(\theta) - \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p^2(\operatorname{sen}^2(\theta) - 2 - \cos(\theta) + \cos^2(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \frac{-p^2(1 - 2 - \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p^2(-1 - \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \frac{p^2(1 + \cos(\theta))}{(1 + \cos(\theta))^4} = \frac{p^2}{(1 + \cos(\theta))^3} \end{aligned}$$

Y por tanto, tendremos: $\forall \theta \in (\pi, 2\pi)$,

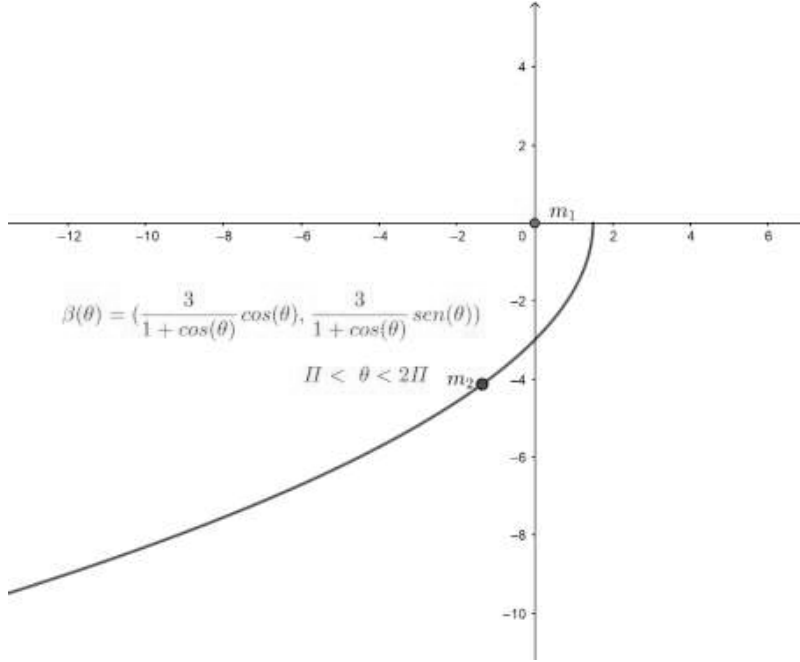
$$\begin{aligned} \frac{\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_1''(\theta) \beta_2'(\theta)}{(\beta_1'(\theta))^3} &= \frac{\frac{p^2}{(1 + \cos(\theta))^3}}{\frac{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{(1 + \cos(\theta))^6}} = \frac{p^2(1 + \cos(\theta))^6}{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta)(1 + \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-(1 + \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)} \end{aligned}$$

i.e., $\forall \theta \in (\pi, 2\pi)$,

$$\frac{\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_1''(\theta) \beta_2'(\theta)}{(\beta_1'(\theta))^3} = \frac{-(1 + \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)} > 0$$

Y, según un resultado anterior, podemos concluir que la curva β es convexa en $(\pi, 2\pi)$

La traza de la curva β , quedará de esta forma, como se representa:



Antes de representar la trayectoria completa de la partícula, i.e., $traz(\alpha) \cup traz(\beta)$, vamos a hacer la siguiente observación:

Si nos fijamos en el punto $F(0,0)$ y en la recta $r \equiv x - p = 0$

y tomamos un punto arbitrario de $traz(\alpha) \cup traz(\beta)$, i.e., un punto P de la forma

$$P\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1+\cos(\theta)} \sin(\theta)\right) \text{ con } \theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$$

Ocurre:

$$\begin{aligned} d(P, r) &= d\left(\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1+\cos(\theta)} \sin(\theta)\right), r\right) = \\ &= \frac{\left|\frac{p}{1+\cos(\theta)} \cos(\theta) - p\right|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} = \left|p\left(\frac{\cos(\theta)}{1+\cos(\theta)} - 1\right)\right| = |p| \left|\frac{\cos(\theta) - 1 - \cos(\theta)}{1+\cos(\theta)}\right| = \\ &= p \left|\frac{-1}{1+\cos(\theta)}\right| = p \frac{1}{1+\cos(\theta)} = \frac{p}{1+\cos(\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(P, F) &= d\left(\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1+\cos(\theta)} \sin(\theta)\right), (0,0)\right) = \\ &= \sqrt{\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)} \cos(\theta) - 0\right)^2 + \left(\frac{p}{1+\cos(\theta)} \sin(\theta) - 0\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)}\right)^2 \cos^2(\theta) + \left(\frac{p}{1+\cos(\theta)}\right)^2 \sin^2(\theta)} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)}\right)^2 (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = \sqrt{\left(\frac{p}{1+\cos(\theta)}\right)^2} = \end{aligned}$$

$$= \left| \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \right| = \frac{p}{1 + \cos(\theta)}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} & \forall \theta \in (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi), \\ & d\left(\left(\frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta)\right), r\right) \\ &= d\left(\left(\frac{p}{1 + \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + \cos(\theta)} \sin(\theta)\right), (0,0)\right) \end{aligned}$$

Entonces:

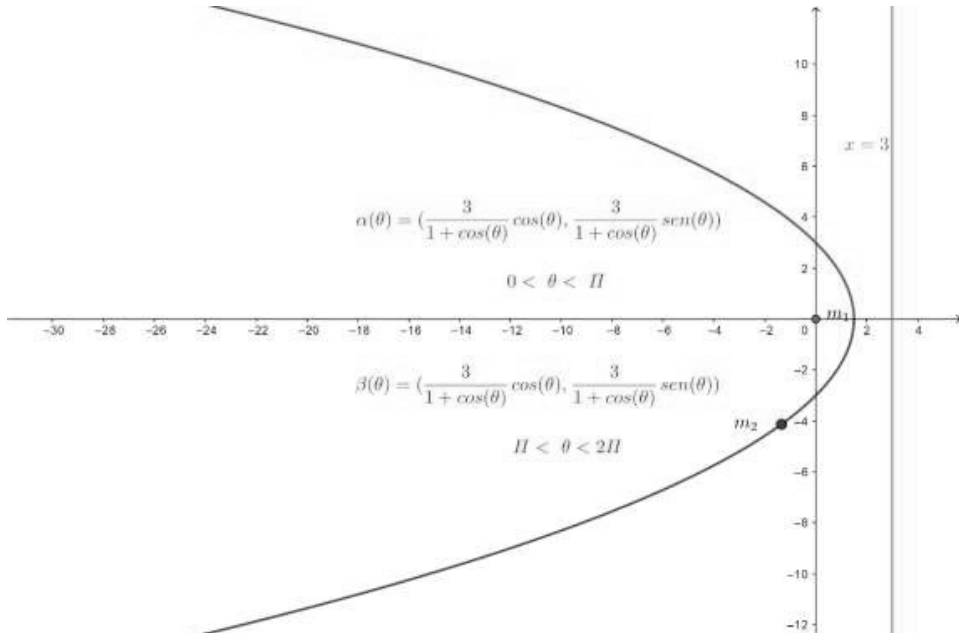
$$\forall P \in \text{traz}(\alpha) \cup \text{traz}(\beta), \quad d(P, r) = d(P, F)$$

Esto quiere decir que todos los puntos de esta forma se encuentran sobre la **parábola** de foco $F(0,0)$ y directriz $r \equiv x - p = 0$

Deducimos de todo esto que en este caso (cuando $e = 1$), todos los puntos de $\text{traz}(\alpha) \cup \text{traz}(\beta)$ se encuentran sobre una **parábola**, que tiene foco $F(0,0)$ y directriz $r \equiv x - p = 0$

En nuestro problema físico, la trayectoria de una partícula en torno a la otra, sigue moviéndose en una sección cónica, en este caso una parábola de foco $F(0,0)$ y directriz $r \equiv x = p$

La representación de dicha trayectoria quedará:



4.8.4 Caso en que $e > 1$

Observemos en primer lugar que ocurre lo siguiente:

Si $e \in \mathbb{R}$, $e > 1$, y $\theta \in [0, 2\pi)$, entonces:

$$1 + e \cos(\theta) = 0 \leftrightarrow e \cos(\theta) = -1 \leftrightarrow \cos(\theta) = -\frac{1}{e}$$

Pero, si $e > 1 \Rightarrow 0 < 1/e < 1 \Rightarrow 0 > -1/e > -1$

Y por tanto sabemos que ocurre:

$$\begin{aligned} \exists ! \theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \cos(\theta_1) &= -\frac{1}{e} \\ \exists ! \theta_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \quad \cos(\theta_2) &= -\frac{1}{e} \end{aligned}$$

Vamos a fijarnos en estos números reales:

$$\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad y \quad \theta_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$$

Ocurre lo siguiente, teniendo en cuenta las propiedades de la función coseno:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in [0, \theta_1) &\Rightarrow 0 \leq \theta < \theta_1 \Rightarrow \cos(0) \geq \cos(\theta) > \cos(\theta_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 \geq \cos(\theta) > -\frac{1}{e} \Rightarrow e \geq e \cos(\theta) > -1 \Rightarrow 1 + e \geq 1 + e \cos(\theta) > 0 \\ \text{i.e., Si } \theta \in [0, \theta_1) &\Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (\theta_1, \pi] &\Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta \leq \pi \Rightarrow \cos(\theta_1) > \cos(\theta) \geq \cos(\pi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{e} > \cos(\theta) \geq -1 \Rightarrow -1 > e \cos(\theta) \geq -e \Rightarrow 0 > 1 + e \cos(\theta) \geq 1 - e \\ \text{i.e., Si } \theta \in (\theta_1, \pi] &\Rightarrow 1 + e \cos(\theta) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (\pi, \theta_2) &\Rightarrow \pi < \theta < \theta_2 \Rightarrow \cos(\pi) < \cos(\theta) < \cos(\theta_2) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -1 < \cos(\theta) < -\frac{1}{e} \Rightarrow -e < e \cos(\theta) < -1 \Rightarrow 1 - e < 1 + e \cos(\theta) < 0 \\ \text{i.e., Si } \theta \in (\pi, \theta_2) &\Rightarrow 1 + e \cos(\theta) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (\theta_2, 2\pi) &\Rightarrow \theta_2 < \theta < 2\pi \Rightarrow \cos(\theta_2) < \cos(\theta) < \cos(2\pi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{1}{e} < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow -1 < e \cos(\theta) < e \Rightarrow 0 < 1 + e \cos(\theta) < 1 + e \\ \text{i.e., Si } \theta \in (\theta_2, 2\pi) &\Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0 \end{aligned}$$

Resumiendo todo lo anterior, tenemos:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in [0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi) &\Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0 \\ \text{Si } \theta \in (\theta_1, \theta_2) &\Rightarrow 1 + e \cos(\theta) < 0 \end{aligned}$$

Para que la correspondencia:

$$f(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \quad \text{con } p > 0$$

sea realmente una función definida en el plano polar, hemos de fijarnos en el dominio:

$$[0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$$

De otra parte, para que se ajuste al marco que nosotros venimos desarrollando, es necesario considerar nuevamente dos ramas para nuestra trayectoria, i.e en principio tenemos la función (en el plano polar):

$$\begin{aligned} f: (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Cuya gráfica en coordenadas polares vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \text{graf}_{pol}(f) &= \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)\} = \\ &= \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, \theta_1)\} \cup \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (\theta_2, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Si consideramos entonces las funciones:

$$\begin{aligned} f_1: (0, \theta_1) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_1(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2: (\theta_2, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_2(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \end{aligned}$$

cuyas gráficas en coordenadas polares serán:

$$\begin{aligned} \text{graf}_{pol}(f_1) &= \{(f_1(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, \theta_1)\} = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, \theta_1)\} \\ \text{graf}_{pol}(f_2) &= \{(f_2(\theta), \theta), \quad \theta \in (\theta_2, 2\pi)\} = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (\theta_2, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Tendremos que:

$$\begin{aligned} \text{graf}_{pol}(f) &= \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)\} = \\ &= \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, \theta_1)\} \cup \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (\theta_2, 2\pi)\} = \\ &= \text{graf}_{pol}(f_1) \cup \text{graf}_{pol}(f_2) \end{aligned}$$

Las representaciones cartesianas de estas gráficas en coordenadas polares guardarán entre ellas la siguiente relación:

$$\psi(\text{graf}_{pol}(f)) = \psi(\text{graf}_{pol}(f_1) \cup \text{graf}_{pol}(f_2))$$

Y ocurre también, que:

$$\psi(\text{graf}_{pol}(f_1) \cup \text{graf}_{pol}(f_2)) = \psi(\text{graf}_{pol}(f_1)) \cup \psi(\text{graf}_{pol}(f_2))$$

Entonces:

$$\psi(\text{graf}_{pol}(f)) = \psi(\text{graf}_{pol}(f_1)) \cup \psi(\text{graf}_{pol}(f_2))$$

Hemos de intentar determinar ahora por tanto, la representación cartesiana de la gráfica de f_1 en coordenadas polares, y también la representación cartesiana de la gráfica de f_2 en coordenadas polares.

Empecemos por la función:

$$\begin{aligned} f_1: (0, \theta_1) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f_1(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Con $p > 0$, $e > 1$

Sabemos que: $\forall \theta \in (0, \theta_1)$, $1 + e \cos(\theta) > 0$, entonces por álgebra de funciones continuas, es f_1 una función continua en el intervalo $(0, \theta_1)$.

También por álgebra de derivadas, es f_1 una función derivable en $(0, \theta_1)$ y

$$\forall \theta \in (0, \theta_1), \quad f_1'(\theta) = \frac{-p(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p e \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}$$

Función, que por álgebra de funciones continuas, vuelve a ser continua en $(0, \theta_1)$

Tenemos, de esta manera que la función f_1 es una función derivable en $(0, \theta_1)$ y su función derivada f_1' es una función continua en $(0, \theta_1)$. Ocurre por tanto que la función f_1 es una función de clase 1 en $(0, \theta_1)$, i.e:

$$f_1 \in C^1(0, \theta_1)$$

Sabemos entonces por un resultado anterior, que en esta situación, la función:

$$\begin{aligned} \alpha: (0, \theta_1) &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \theta &\rightarrow \alpha(\theta) = (f_1(\theta) \cos(\theta), f_1(\theta) \operatorname{sen}(\theta)) \end{aligned}$$

es una curva regular plana cuya traza coincide con la representación cartesiana de la gráfica de f_1 en coordenadas polares, i.e:

$$\operatorname{traz}(\alpha) = \psi(\operatorname{graf}_{pol}(f_1))$$

Como pretendíamos representar: $\psi(\operatorname{graf}_{pol}(f_1))$, vamos por tanto a intentar conocer:

$\operatorname{traz}(\alpha)$

Consideramos pues:

$$\begin{aligned} \alpha: (0, \theta_1) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow \alpha(\theta) = \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \right) \end{aligned}$$

Y vamos a empezar estudiando las regiones del plano cartesiano donde se encuentra:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 0 < e \cos(\theta) < e \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 < 1 + e \cos(\theta) < 1 + e \Rightarrow 0 < \frac{1}{1 + e \cos(\theta)} < 1 \Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < p \end{aligned}$$

Tendremos de esta manera, de un lado:

$$\begin{cases} 0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < p \\ 0 < \cos(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) = \alpha_1(\theta) < p \cos(\theta) < p$$

$$\text{i.e: } \alpha_1(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p]$$

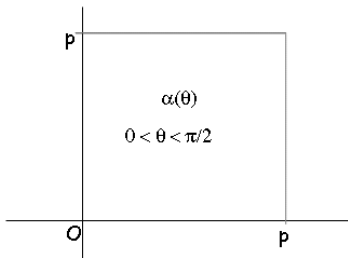
Y de otro lado:

$$\begin{cases} 0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} < p \\ 0 < \operatorname{sen}(\theta) < 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) < p \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \alpha_2(\theta) < p \operatorname{sen}(\theta) < p$$

$$\text{i.e: } \alpha_2(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p]$$



Ocurre entonces:

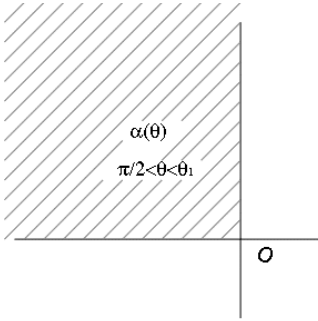
$$\text{Si } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \alpha(\theta) = (\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)) \in [0, p] \times [0, p]$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_1\right) &\subseteq \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \theta_1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) > \cos(\theta) > \cos(\theta_1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 > \cos(\theta) > -\frac{1}{e} \Rightarrow 0 > e \cos(\theta) > -1 \Rightarrow -1 < e \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < 1 + e \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 1 < \frac{1}{1 + e \cos(\theta)} \Rightarrow p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Tendremos así, de un lado:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \\ -\frac{1}{e} < \cos(\theta) < 0 \end{array} \right\} &\Rightarrow p \cos(\theta) > \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha_1(\theta) \in (-\infty, 0] \subseteq (-\infty, 0] \end{aligned}$$



Y de otro lado:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \\ 0 < \sin(\theta) < 1 \end{array} \right\} &\Rightarrow \\ &\Rightarrow p \sin(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < p \sin(\theta) < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 0 < \alpha_2(\theta) \Rightarrow \alpha_2(\theta) \in (0, +\infty) \subseteq [0, +\infty) \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \theta_1\right) \Rightarrow \alpha(\theta) \in (-\infty, 0] \times [0, +\infty)$$

Para seguir, vamos a intentar estudiar el crecimiento de nuestra curva.

Tanto $\alpha_1(\theta)$ como $\alpha_2(\theta)$ son funciones derivables en $(0, \theta_1)$ (por ser α una curva regular plana como sabemos), y $\forall \theta \in (0, \theta_1)$,

$$\begin{aligned} \alpha'_1(\theta) &= \frac{-p \sin(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - p \cos(\theta)(-e \sin(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{-p \sin(\theta) - p e \sin(\theta) \cos(\theta) + p e \sin(\theta) \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{-p \sin(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \\ \alpha'_2(\theta) &= \frac{p \cos(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - p \sin(\theta)(-e \sin(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{p \cos(\theta) + p e \cos^2(\theta) + p e \sin^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p \cos(\theta) + p e (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{p \cos(\theta) + p e}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} \end{aligned}$$

Ocurre ahora lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (0, \theta_1) \subseteq (0, \pi) &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{sen}(\theta) > 0 \\ 1 + e \cos(\theta) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -p \operatorname{sen}(\theta) < 0 \\ (1 + e \cos(\theta))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha'_1(\theta) = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} < 0 \end{aligned}$$

Esto quiere decir que la función α_1 es una función estrictamente decreciente en el intervalo $(0, \theta_1)$ (según una consecuencia del TVM de Lagrange)

También ocurre:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (0, \theta_1) &\Rightarrow \cos(\theta) > -1 \Rightarrow e + \cos(\theta) > e - 1 > 0 \Rightarrow \\ e + \cos(\theta) > 0 &\Rightarrow p(e + \cos(\theta)) > 0 \Rightarrow \alpha'_2(\theta) = \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} > 0 \end{aligned}$$

Según esto la función α_2 es una función estrictamente creciente en el intervalo $(0, \theta_1)$ (por una consecuencia del TVM de Lagrange)

Y como ocurre que:

$$\forall \theta \in (0, \theta_1), \quad \alpha'_1(\theta) \alpha'_2(\theta) < 0$$

Tendremos por un resultado anterior, que la curva α es una curva estrictamente decreciente en $(0, \theta_1)$

Para estudiar su concavidad o convexidad, empecemos observando que tanto α'_1 como α'_2 son funciones derivables en $(0, \theta_1)$ y que $\forall \theta \in (0, \theta_1)$,

$$\begin{aligned} \alpha''_1(\theta) &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + e \cos(\theta))^2 + p \operatorname{sen}(\theta) 2(1 + e \cos(\theta))(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - 2pe \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe(1 - \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe + 2pe \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{pe \cos^2(\theta) - p \cos(\theta) - 2pe}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \frac{p(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^3} \\ \alpha''_2(\theta) &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)(1 + e \cos(\theta))^2 - p(e + \cos(\theta))2(1 + e \cos(\theta))(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - 2p(e + \cos(\theta))(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2pe \operatorname{sen}(\theta)(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2pe^2 \operatorname{sen}(\theta) + 2pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) + pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2pe^2 \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \end{aligned}$$

$$= \frac{p \operatorname{sen}(\theta)(2e^2 + e \cos(\theta) - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^3}$$

i.e., $\forall \theta \in (0, \theta_1)$,

$$\alpha_1''(\theta) = \frac{p(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^3}$$

$$\alpha_2''(\theta) = \frac{p \operatorname{sen}(\theta)(2e^2 + e \cos(\theta) - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^3}$$

Por lo que tendremos: $\forall \theta \in (0, \theta_1)$,

$$\begin{aligned} \alpha_1'(\theta) \alpha_2''(\theta) &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \frac{p \operatorname{sen}(\theta)(2e^2 + e \cos(\theta) - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)(2e^2 + e \cos(\theta) - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1''(\theta) \alpha_2'(\theta) &= \frac{p(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^3} \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\ &= \frac{p^2(e^2 \cos^2(\theta) + e \cos^3(\theta) - e \cos(\theta) - \cos^2(\theta) - 2e^2 - 2e \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\ &= \frac{p^2(e^2 \cos^2(\theta) + e \cos^3(\theta) - 3e \cos(\theta) - \cos^2(\theta) - 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^5} \end{aligned}$$

Y será entonces: $\forall \theta \in (0, \theta_1)$,

$$\begin{aligned} \alpha_1'(\theta) \alpha_2''(\theta) - \alpha_1''(\theta) \alpha_2'(\theta) &= \\ &= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)(2e^2 + e \cos(\theta) - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^5} - \\ &\quad - \frac{p^2(e^2 \cos^2(\theta) + e \cos^3(\theta) - 3e \cos(\theta) - \cos^2(\theta) - 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\ &= \frac{-p^2(1 - \cos^2(\theta))(2e^2 + e \cos(\theta) - 1)}{(1 + e \cos(\theta))^5} - \\ &\quad - \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) + p^2 e \cos^3(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - p^2 \cos^2(\theta) - 2p^2 e^2}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\ &= \frac{-p^2(2e^2 + e \cos(\theta) - 1 - 2e^2 \cos^2(\theta) - e \cos^3(\theta) + \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^5} - \\ &\quad - \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) + p^2 e \cos^3(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - p^2 \cos^2(\theta) - 2p^2 e^2}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\ &= \frac{-2p^2 e^2 - p^2 e \cos(\theta) + p^2 + 2p^2 e^2 \cos^2(\theta) + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} - \\ &\quad - \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) + p^2 e \cos^3(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - p^2 \cos^2(\theta) - 2p^2 e^2}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2p^2 e \cos(\theta) + p^2 + p^2 e^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{p^2 (2e \cos(\theta) + 1 + e^2 \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{p^2 (1 + e \cos(\theta))^2}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3}
 \end{aligned}$$

i.e., será:

$$\forall \theta \in (0, \theta_1), \quad \alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta) = \frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3} > 0$$

Tenemos de esta manera, que: $\forall \theta \in (0, \theta_1)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta)}{(\alpha'_1(\theta))^3} &= \frac{\frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3}}{\frac{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^6}} = \frac{-p^2 (1 + e \cos(\theta))^6}{p^3 \operatorname{sen}^3(\theta) (1 + e \cos(\theta))^3} = \\
 &= -\frac{(1 + e \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)} < 0
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\forall \theta \in (0, \theta_1), \quad \frac{\alpha'_1(\theta) \alpha''_2(\theta) - \alpha''_1(\theta) \alpha'_2(\theta)}{(\alpha'_1(\theta))^3} = -\frac{(1 + e \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)} < 0$$

Y en virtud de un resultado anterior, concluimos que la curva α es una curva cóncava en $(0, \theta_1)$

Para entender algo mejor el comportamiento de la traza de la curva α vamos a observar ahora lo siguiente:

$$\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \cos(\theta_1) = \frac{-1}{e}$$

Por álgebra de límites y siendo la función coseno una función continua, tendremos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} (1 + e \cos(\theta)) = 1 + e \cos(\theta_1) = 1 + e \left(\frac{-1}{e}\right) = 1 - 1 = 0$$

Más aún como la función coseno es una función decreciente en $(0, \theta_1)$, entonces:

$$\forall \theta \in (0, \theta_1), \quad \cos(\theta) > \cos(\theta_1) = -\frac{1}{e} \Rightarrow e \cos(\theta) > -1 \Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0$$

En esta situación, sabemos que ocurre entonces:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{1}{1 + e \cos(\theta)}\right) = +\infty \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)}\right) = +\infty$$

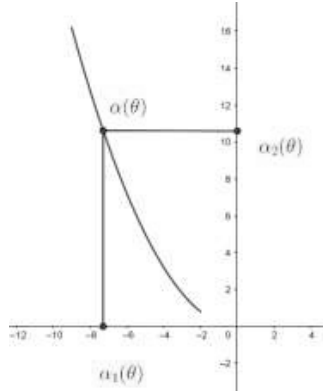
Teniendo en cuenta que:

$$\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \quad \cos(\theta_1) = -\frac{1}{e} < 0, \quad \operatorname{sen}(\theta_1) > 0$$

Se tendrá:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta)\right) &= -\infty \\
 \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta)\right) &= +\infty
 \end{aligned}$$

i.e., la traza de nuestra curva α verifica:



$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \alpha_1(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) \right) = -\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \alpha_2(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sen(\theta) \right) = +\infty$$

También ocurre lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{\alpha'_2(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} \right) &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2}}{\frac{-p \sen(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(e + \cos(\theta))}{-p \sen(\theta)} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(-\frac{e + \cos(\theta)}{\sen(\theta)} \right) \\ &= -\frac{e + \cos(\theta_1)}{\sen(\theta_1)} \end{aligned}$$

por álgebra de funciones continuas.

Pero sabemos además, que:

$$\theta_1 \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \quad \cos(\theta_1) = -\frac{1}{e}$$

Y por tanto, también:

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta_1) &= \frac{1}{e^2} \Rightarrow 1 - \cos^2(\theta_1) = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2} \Rightarrow \sen^2(\theta_1) = \frac{e^2 - 1}{e^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \sen(\theta_1) &= +\sqrt{\frac{e^2 - 1}{e^2}} = \frac{+\sqrt{e^2 - 1}}{|e|} = \frac{+\sqrt{e^2 - 1}}{e} \end{aligned}$$

Por lo que tendremos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{\alpha'_2(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} \right) = -\frac{e + \cos(\theta_1)}{\sen(\theta_1)} = -\frac{e - \frac{1}{e}}{\frac{+\sqrt{e^2 - 1}}{e}} = -\frac{\frac{e^2 - 1}{e}}{\frac{+\sqrt{e^2 - 1}}{e}} = -\frac{e^2 - 1}{+\sqrt{e^2 - 1}} = -\sqrt{e^2 - 1}$$

Tenemos en resumen:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \alpha_1(\theta) = -\infty ; \quad \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \alpha_2(\theta) = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{\alpha'_2(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} \right) = -\sqrt{e^2 - 1}$$

Si recordamos que $\forall \theta \in (0, \theta_1)$, es $(\alpha'_1(\theta), \alpha'_2(\theta))$ el vector tangente a la curva α en el punto $(\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta))$, interpretamos de lo anterior, que cuando θ se acerca a θ_1 por la izquierda, la curva se aleja a ∞ (por el segundo cuadrante) y además lo hace de manera que las pendientes de las tangentes en los puntos $\alpha(\theta)$ se aproximan al número real $m = -\sqrt{e^2 - 1}$, i.e la curva α se aleja a ∞ (por el segundo cuadrante del plano) según le marca una recta de pendiente

$$m = -\sqrt{e^2 - 1}.$$

Esto parece indicar que la traza de nuestra curva tiene una asíntota oblicua cuya pendiente resulta ser: $m = -\sqrt{e^2 - 1}$

Para intentar determinar la ordenada en el origen de esta presunta asíntota, vamos a proceder como sigue:

En cualquier punto $\alpha(\theta)$ de nuestra curva, la recta tangente a ésta, tendrá por ecuación vectorial:

$$(x, y) = (\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta)) + \lambda (\alpha'_1(\theta), \alpha'_2(\theta)), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

En forma continua:

$$\frac{x - \alpha_1(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} = \frac{y - \alpha_2(\theta)}{\alpha'_2(\theta)}$$

La ordenada en el origen de estas tangentes, se obtiene haciendo la intersección de estas rectas con el eje de ordenadas, i.e: resolviendo el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \frac{x - \alpha_1(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} = \frac{y - \alpha_2(\theta)}{\alpha'_2(\theta)} \\ x = 0 \end{cases}$$

Si resolvemos el sistema, obtenemos que la ordenada en el origen de todas estas tangentes, resulta ser:

$$\frac{-\alpha_1(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} = \frac{y - \alpha_2(\theta)}{\alpha'_2(\theta)} \Rightarrow \frac{-\alpha_1(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} \alpha'_2(\theta) = y - \alpha_2(\theta) \Rightarrow y = \alpha_2(\theta) - \alpha_1(\theta) \frac{\alpha'_2(\theta)}{\alpha'_1(\theta)}$$

Si intentamos ver qué ocurre con las ordenadas en el origen de estas tangentes cuando θ se acerca a θ_1 por la izquierda, tendremos que estudiar:

$$\begin{aligned} & \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\alpha_2(\theta) - \alpha_1(\theta) \frac{\alpha'_2(\theta)}{\alpha'_1(\theta)} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \frac{\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2}}{\frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \frac{-(e + \cos(\theta))}{\operatorname{sen}(\theta)} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p \cos(\theta)(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p \operatorname{sen}^2(\theta) + p e \cos(\theta) + p \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p + p e \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(1 + e \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{\operatorname{sen}(\theta)} \right) \end{aligned}$$

Y sabiendo que la función seno es continua en θ_1 y que además $\operatorname{sen}(\theta_1) \neq 0$, tendremos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\alpha_2(\theta) - \alpha_1(\theta) \frac{\alpha_2'(\theta)}{\alpha_1'(\theta)} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p}{\text{sen}(\theta)} \right) = \frac{p}{\text{sen}(\theta_1)} = \frac{p}{\frac{e}{\sqrt{e^2 - 1}}} = \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Esto quiere decir que cuando θ tiende a θ_1 por la izquierda, las ordenadas en el origen de las rectas tangentes a la curva α en los puntos $\alpha(\theta)$ tienden al número real

$$n = \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Esto, unido a lo anterior, parece indicarnos que en el caso de que exista realmente una asíntota oblicua para nuestra curva, un buen candidato a ser su pendiente sería el número real

$m = -\sqrt{e^2 - 1}$ y un buen candidato a ser su ordenada en el origen sería el número real

$$n = \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

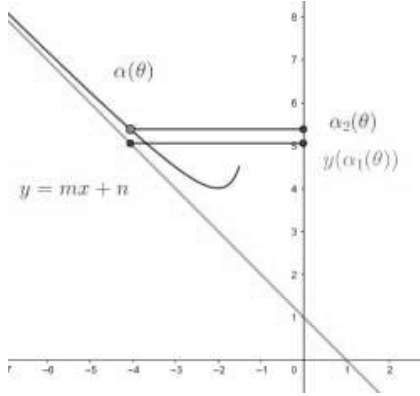
Vamos a considerar entonces la recta de ecuación:

$$r \equiv y = \left(-\sqrt{e^2 - 1} \right) x + \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Y vamos a intentar confirmar nuestra sospecha de que efectivamente la recta r es una asíntota oblicua para nuestra curva α cuando θ tiende a θ_1 por la izquierda. Para ello, vamos a proceder de la siguiente forma:

Vamos a estudiar como de lejos están las segundas coordenadas (las ordenadas) de la recta r y de la curva α para una misma abscisa $\alpha_1(\theta)$

cundo θ está muy próxima a θ_1



La ordenada de la recta r para la abscisa $\alpha_1(\theta)$, resulta ser:

$$y = \left(-\sqrt{e^2 - 1} \right) \alpha_1(\theta) + \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} y &= \left(-\sqrt{e^2 - 1} \right) \frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) \sqrt{e^2 - 1}}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta)(e^2 - 1) + pe(1 + e \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \sqrt{e^2 - 1}} = \\ &= \frac{-pe^2 \cos(\theta) + p \cos(\theta) + pe + pe^2 \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \sqrt{e^2 - 1}} = \frac{pe + p \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \sqrt{e^2 - 1}} = \\ &= \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \sqrt{e^2 - 1}} \end{aligned}$$

Y la ordenada de la curva para la abscisa $\alpha_1(\theta)$, ya sabemos que es:

$$\alpha_2(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \text{sen}(\theta)$$

Vamos a estudiar entonces el límite siguiente:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \right)$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))\sqrt{e^2 - 1}} - \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \right) &= \\ \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(e + \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1}}{(1 + e \cos(\theta))\sqrt{e^2 - 1}} \right) & \end{aligned}$$

Pero ocurre, por la continuidad de las funciones seno y coseno y por álgebra de límites, lo siguiente:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} (p(e + \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1}) &= p(e + \cos(\theta_1)) - p \operatorname{sen}(\theta_1)\sqrt{e^2 - 1} = \\ &= p\left(e - \frac{1}{e}\right) - p \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \sqrt{e^2 - 1} = p\left(\frac{e^2 - 1}{e}\right) - p \frac{e^2 - 1}{e} = 0 \end{aligned}$$

Y también:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} (\sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta))) &= \sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta_1)) = \\ &= \sqrt{e^2 - 1} \left(1 + e \left(\frac{-1}{e} \right) \right) = \sqrt{e^2 - 1}(1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Se comprueba con facilidad que estamos en condiciones de poder utilizar la regla de L'Hôpital.

Procedemos entonces de la siguiente manera:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \frac{\frac{d}{d\theta} (p(e + \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1})}{\frac{d}{d\theta} (\sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta)))} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - p\sqrt{e^2 - 1} \cos(\theta)}{\sqrt{e^2 - 1}(-e \operatorname{sen}(\theta))}$$

Y nuevamente por la continuidad de las funciones seno y coseno y por álgebra de límites, será:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - p\sqrt{e^2 - 1} \cos(\theta)}{\sqrt{e^2 - 1}(-e \operatorname{sen}(\theta))} &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta_1) - p\sqrt{e^2 - 1} \cos(\theta_1)}{\sqrt{e^2 - 1}(-e \operatorname{sen}(\theta_1))} = \\ &= \frac{-p \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} - p\sqrt{e^2 - 1} \left(\frac{-1}{e} \right)}{-\sqrt{e^2 - 1} e \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}} = \frac{-p \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} + p \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}}{-(e^2 - 1)} = 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, ocurrirá según el resultado de L'Hôpital, que:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta))} - \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \right) &= \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{p(e + \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1}}{\sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta))} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_1^-} \left(\frac{\frac{d}{d\theta} (p(e + \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1})}{\frac{d}{d\theta} (\sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta)))} \right) = 0 \end{aligned}$$

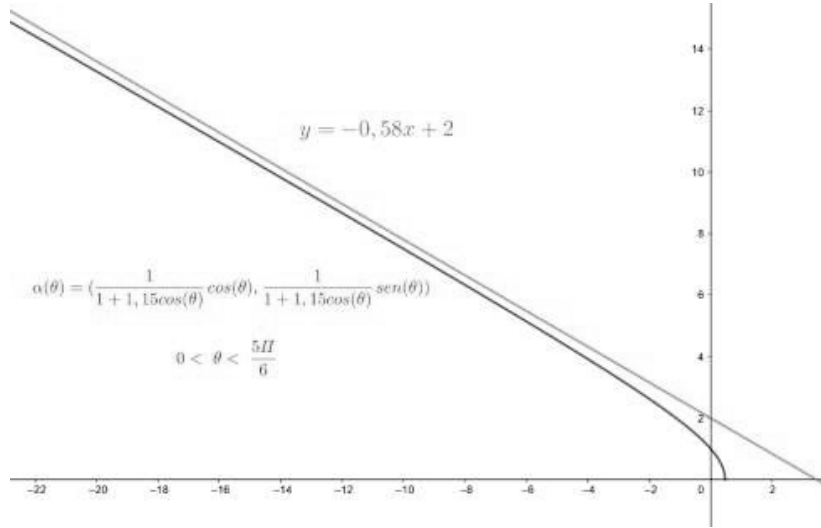
i.e., la distancia entre las ordenadas de la recta r y de la curva α para una misma abscisa $\alpha_1(\theta)$ tiende a cero cuando θ tiende a θ_1 por la izquierda.

Esto quiere decir que efectivamente la recta r de ecuación:

$$r \equiv y = -(\sqrt{e^2 - 1})x + \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Es una asíntota oblicua para nuestra curva $\alpha(\theta)$.

Podemos hacer ya un esbozo de la traza de la curva α



Una vez terminado el estudio de la función f_1 , y la representación cartesiana de su gráfica en coordenadas polares, vamos a iniciar el de f_2 .

$$f_2: (\theta_2, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f_2(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

Siendo $p \in \mathbb{R}$, $p > 0$, $e \in \mathbb{R}$, $e > 1$ y

$$\theta_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right), \quad \cos(\theta_2) = -\frac{1}{e}$$

Ocurre que:

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad \cos(\theta) > \cos(\theta_2) = -\frac{1}{e} \Rightarrow e \cos(\theta) > -1 \Rightarrow 1 + e \cos(\theta) > 0 \Rightarrow$$

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad 1 + e \cos(\theta) \neq 0$$

Entonces, por álgebra de funciones continuas, será f_2 una función continua en $(\theta_2, 2\pi)$.

También, por álgebra de derivadas, es f_2 una función derivable en $(\theta_2, 2\pi)$ y

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad f_2'(\theta) = \frac{-p(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{pe \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}$$

Función $(f_2'(\theta))$, que vuelve a ser por álgebra de funciones continuas, una función continua en el intervalo $(\theta_2, 2\pi)$.

Tenemos así, que f_2 es una función derivable en $(\theta_2, 2\pi)$, con función derivada f_2' continua en $(\theta_2, 2\pi)$, i.e: tenemos que

$$f_2 \in C^1(\theta_2, 2\pi)$$

Según un resultado anterior, tendremos en consecuencia que la función:

$$\beta: (\theta_2, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\theta \rightarrow \beta(\theta) = (f_2(\theta) \cos(\theta), f_2(\theta) \sin(\theta))$$

es una curva regular plana cuya traza coincide con la representación cartesiana de la gráfica de f_2 en coordenadas polares, i.e:

$$\text{traz}(\beta) = \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f_2))$$

Bien, pues vamos a intentar representar entonces la traza de la curva β

$$\beta: (\theta_2, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

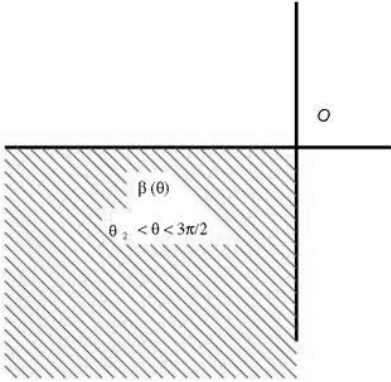
$$\theta \rightarrow \beta(\theta) = \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \right)$$

Observemos en principio lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in \left(\theta_2, \frac{3\pi}{2} \right) &\Rightarrow \theta_2 < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\theta_2) < \cos(\theta) < \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{-1}{e} < \cos(\theta) < 0 \Rightarrow -1 < e \cos(\theta) < 0 \Rightarrow 0 < 1 + e \cos(\theta) < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 < \frac{1}{1 + e \cos(\theta)} \Rightarrow p < \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \end{aligned}$$

Entonces tendremos, de un lado:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} p &< \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \\ -1 &< \cos(\theta) < 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow p \cos(\theta) > \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) < 0 \Rightarrow \beta_1(\theta) \in (-\infty, 0) \subseteq (0, +\infty] \end{aligned}$$



Y de otro lado:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} p &< \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \\ -1 &< \sin(\theta) < 0 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \\ p \sin(\theta) &> \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \sin(\theta) < 0 \\ &\Rightarrow \beta_2(\theta) \in (-\infty, 0) \subseteq (-\infty, 0] \end{aligned}$$

Tenemos así:

$$\text{Si } \theta \in \left(\theta_2, \frac{3\pi}{2} \right) \Rightarrow \beta(\theta) \in (-\infty, 0] \times (-\infty, 0]$$

Y si ocurre que: $\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right)$, tendremos:

$$\theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi \right) \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi \Rightarrow 0 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow 0 < e \cos(\theta) < e \Rightarrow$$

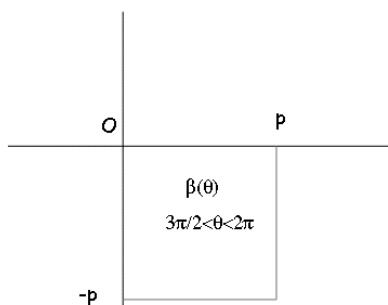
$$\Rightarrow 1 < 1 + e \cos(\theta) < 1 + e \Rightarrow \frac{1}{1+e} < \frac{1}{1+e \cos(\theta)} < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p$$

Y por tanto, de un lado:

$$\left. \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \right\} \Rightarrow \frac{p}{1+e} \cos(\theta) < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta) < p \Rightarrow \beta_1(\theta) \in (0, p) \subseteq [0, p]$$



Y de otro lado:

$$\left. \frac{p}{1+e} < \frac{p}{1+e \cos(\theta)} < p \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1+e} > \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1+e \cos(\theta)} > p \operatorname{sen}(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 > \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) > -p \Rightarrow$$

$$\beta_2(\theta) \in (-p, 0) \subseteq [-p, 0]$$

Tenemos de esta manera:

$$\text{Si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \beta(\theta) = (\beta_1(\theta), \beta_2(\theta)) \in [0, p] \times [-p, 0]$$

Una vez conocidas las regiones del plano donde se encuentra, vamos a intentar estudiar su crecimiento.

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad \beta_1(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta), \quad \beta_2(\theta) = \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta)$$

Y siendo β una curva regular plana, ocurre que tanto β_1 como β_2 son funciones derivables en $(\theta_2, 2\pi)$ y $\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi)$,

$$\beta_1'(\theta) = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)(1+e \cos(\theta)) - p \cos(\theta)(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1+e \cos(\theta))^2} =$$

$$= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - p e \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + p e \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(1+e \cos(\theta))^2} = \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1+e \cos(\theta))^2}$$

$$\beta_2'(\theta) = \frac{p \cos(\theta)(1+e \cos(\theta)) - p \operatorname{sen}(\theta)(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1+e \cos(\theta))^2} =$$

$$= \frac{p \cos(\theta) + p e \cos^2(\theta) + p e \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1+e \cos(\theta))^2} = \frac{p \cos(\theta) + p e (\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta))}{(1+e \cos(\theta))^2} =$$

$$= \frac{p \cos(\theta) + p e}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (\theta_2, 2\pi) &\Rightarrow \theta \in (\theta_2, 2\pi) \subseteq (\pi, 2\pi) \Rightarrow \text{sen}(\theta) < 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -p \text{sen}(\theta) > 0 \\ (1 + e \cos(\theta))^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-p \text{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} > 0 \Rightarrow \beta'_1(\theta) > 0 \end{aligned}$$

Y por tanto, la función β_1 es una función estrictamente creciente en el intervalo $(\theta_2, 2\pi)$

Y también:

$$\begin{aligned} \text{Si } \theta \in (\theta_2, 2\pi) &\Rightarrow \theta \in (\theta_2, 2\pi) \subseteq (\pi, 2\pi) \Rightarrow -1 < \cos(\theta) < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow e - 1 < e + \cos(\theta) < e + 1 \Rightarrow 0 < e + \cos(\theta) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p(e + \cos(\theta)) > 0 \\ (1 + e \cos(\theta))^2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} > 0 \Rightarrow \beta'_2(\theta) > 0 \end{aligned}$$

Luego β_2 es también una función estrictamente creciente en el intervalo $(\theta_2, 2\pi)$

Como ocurre entonces que:

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad \beta'_1(\theta) \beta'_2(\theta) > 0$$

podemos asegurar por un resultado anterior, que la curva β es estrictamente creciente en $(\theta_2, 2\pi)$.

Para estudiar su concavidad y convexidad, volvamos a observar que por álgebra de derivadas, son $\beta'_1(\theta)$ y $\beta'_2(\theta)$ dos funciones derivables en $(\theta_2, 2\pi)$, y que: $\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi)$,

$$\begin{aligned} \beta''_1(\theta) &= \frac{-p \cos(\theta) (1 + e \cos(\theta))^2 + p \text{sen}(\theta) 2(1 + e \cos(\theta))(-e \text{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^4} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta)(1 + e \cos(\theta)) - 2pe \text{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe \text{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe(1 - \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) - pe \cos^2(\theta) - 2pe + 2pe \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\ &= \frac{-p \cos(\theta) + pe \cos^2(\theta) - 2pe}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \frac{p(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2'''(\theta) &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)(1 + e \cos(\theta))^2 - p(e + \cos(\theta))2(1 + e \cos(\theta))(-e \operatorname{sen}(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^4} \\
 &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)(1 + e \cos(\theta)) + 2pe \operatorname{sen}(\theta)(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) - pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2pe^2 \operatorname{sen}(\theta) + 2pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta) + pe \operatorname{sen}(\theta) \cos(\theta) + 2p e^2 \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{p \operatorname{sen}(\theta)(-1 + e \cos(\theta) + 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^3}
 \end{aligned}$$

De donde tendremos: $\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi)$,

$$\begin{aligned}
 \beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) &= \frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2} \frac{p \operatorname{sen}(\theta)(-1 + e \cos(\theta) + 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{-p^2 \operatorname{sen}^2(\theta)(-1 + e \cos(\theta) + 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{-p^2(1 - \cos^2(\theta))(-1 + e \cos(\theta) + 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{(p^2 \cos^2(\theta) - p^2)(-1 + e \cos(\theta) + 2e^2)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{p^2 - p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 - p^2 \cos^2(\theta) + p^2 e \cos^3(\theta) + 2p^2 e^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_1''(\theta) \beta_2'(\theta) &= \frac{p(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^3} \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2} = \\
 &= \frac{p^2(e + \cos(\theta))(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{(p^2 e + p^2 \cos(\theta))(e \cos^2(\theta) - \cos(\theta) - 2e)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) - p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta) - 2p^2 e \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} \\
 &= \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5}
 \end{aligned}$$

Entonces: $\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi)$,

$$\beta_1'(\theta) \beta_2''(\theta) - \beta_1''(\theta) \beta_2'(\theta) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p^2 - p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 - p^2 \cos^2(\theta) + p^2 e \cos^3(\theta) + 2p^2 e^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} - \\
 &- \frac{p^2 e^2 \cos^2(\theta) - 3p^2 e \cos(\theta) - 2p^2 e^2 + p^2 e \cos^3(\theta) - p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{p^2 + 2p^2 e \cos(\theta) + p^2 e^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{p^2 (1 + 2e \cos(\theta) + e^2 \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \\
 &= \frac{p^2 (1 + e \cos(\theta))^2}{(1 + e \cos(\theta))^5} = \frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3}
 \end{aligned}$$

Y por tanto: $\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi)$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\beta'_1(\theta) \beta''_2(\theta) - \beta''_1(\theta) \beta'_2(\theta)}{(\beta'_1(\theta))^3} &= \frac{\frac{p^2}{(1 + e \cos(\theta))^3}}{\frac{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^6}} = \frac{p^2 (1 + e \cos(\theta))^6}{-p^3 \operatorname{sen}^3(\theta) (1 + e \cos(\theta))^3} = \\
 &= \frac{-(1 + e \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)}
 \end{aligned}$$

Como además:

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad \begin{cases} (1 + e \cos(\theta)) > 0 \\ \operatorname{sen}(\theta) < 0 \end{cases}$$

Tendremos entonces:

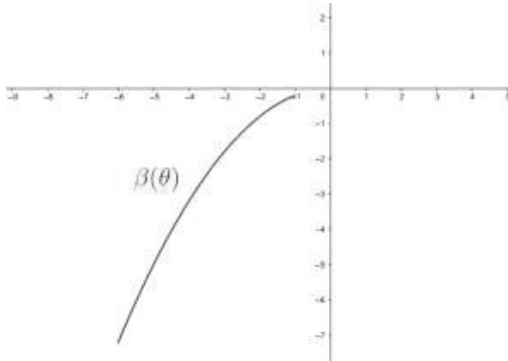
$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi), \quad \frac{\beta'_1(\theta) \beta''_2(\theta) - \beta''_1(\theta) \beta'_2(\theta)}{(\beta'_1(\theta))^3} = -\frac{(1 + e \cos(\theta))^3}{p \operatorname{sen}^3(\theta)} > 0$$

Según un resultado anterior, esto quiere decir que la curva β es una curva convexa en $(\theta_2, 2\pi)$

Vamos a hacer ahora un estudio análogo al que hemos hecho para la curva α , para intentar determinar si puede tener alguna asíntota.

Observemos en principio que por ser $\theta_2 \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, ocurre:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \beta_1(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \cos(\theta) \right) = -\infty \\
 \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \beta_2(\theta) &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p}{1 + e \cos(\theta)} \operatorname{sen}(\theta) \right) = -\infty
 \end{aligned}$$



Cuando θ tiende a θ_2 por la derecha, la traza de la curva β tiene el comportamiento que se muestra en la figura. Pero ocurre también:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{\beta_2'(\theta)}{\beta_1'(\theta)} &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2}}{\frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p(e + \cos(\theta))}{-p \operatorname{sen}(\theta)} \right) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{e + \cos(\theta)}{-\operatorname{sen}(\theta)} \end{aligned}$$

Por la continuidad de las funciones seno y coseno y por álgebra de límites, tendremos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{\beta_2'(\theta)}{\beta_1'(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(-\frac{e + \cos(\theta)}{\operatorname{sen}(\theta)} \right) = -\frac{e + \cos(\theta_2)}{\operatorname{sen}(\theta_2)}$$

Sabemos además que $\theta_2 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$ y $\cos(\theta_2) = -1/e$. Entonces:

$$\begin{aligned} \cos^2(\theta_2) = \frac{1}{e^2} \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2(\theta_2) = \frac{1}{e^2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2(\theta_2) = 1 - \frac{1}{e^2} = \frac{e^2 - 1}{e^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \operatorname{sen}(\theta_2) = -\sqrt{\frac{e^2 - 1}{e^2}} = -\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{\beta_2'(\theta)}{\beta_1'(\theta)} \right) = -\frac{(e + \cos(\theta_2))}{\operatorname{sen}(\theta_2)} = -\frac{\left(e - \frac{1}{e}\right)}{-\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}} = \frac{\frac{e^2 - 1}{e}}{\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}} = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{e^2 - 1}} = \sqrt{e^2 - 1}$$

Ocurre pues, que aunque cuando θ tiende a θ_2 por la derecha, la traza de la curva β se aleja a ∞ , lo hace de manera que las pendientes de sus tangentes se acercan al número real $m = \sqrt{e^2 - 1}$, i.e., parece que la curva se aleja según le marca una recta de pendiente $m = \sqrt{e^2 - 1}$

Si nos fijamos ahora en la recta tangente a la curva β en un punto arbitrario $\beta(\theta)$, esta recta tendrá por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \beta_1(\theta) + \lambda \beta_1'(\theta) \\ y = \beta_2(\theta) + \lambda \beta_2'(\theta) \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

En forma continua:

$$\frac{x - \beta_1(\theta)}{\beta_1'(\theta)} = \frac{y - \beta_2(\theta)}{\beta_2'(\theta)}$$

Esta recta tendrá por ordenada en el origen, la ordenada del punto de intersección de las rectas:

$$\begin{cases} \frac{x - \beta_1(\theta)}{\beta_1'(\theta)} = \frac{y - \beta_2(\theta)}{\beta_2'(\theta)} \\ x = 0 \end{cases}$$

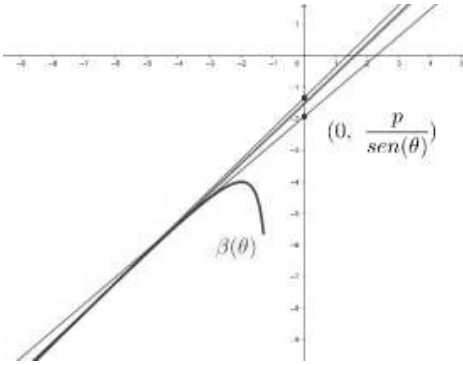
i.e.,

$$\frac{0 - \beta_1(\theta)}{\beta_1'(\theta)} = \frac{y - \beta_2(\theta)}{\beta_2'(\theta)} \Rightarrow -\beta_1(\theta) \frac{\beta_2'(\theta)}{\beta_1'(\theta)} = y - \beta_2(\theta) \Rightarrow y = \beta_2(\theta) - \beta_1(\theta) \frac{\beta_2'(\theta)}{\beta_1'(\theta)}$$

será:

$$\begin{aligned} y &= \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \frac{\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2}}{\frac{-p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2}} = \\ &= \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \frac{p(e + \cos(\theta))}{-p \operatorname{sen}(\theta)} = \\ &= \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))} + \frac{p \cos(\theta)(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} = \\ &= \frac{p \operatorname{sen}^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} + \frac{p e \cos(\theta) + p \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} = \\ &= \frac{p \operatorname{sen}^2(\theta) + p e \cos(\theta) + p \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} = \frac{p(\operatorname{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) + e \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} = \\ &= \frac{p(1 + e \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta)) \operatorname{sen}(\theta)} = \frac{p}{\operatorname{sen}(\theta)} \end{aligned}$$

i.e: la recta tangente a la curva β en el punto $\beta(\theta)$ tiene por ordenada en el origen, el número real: $p/\operatorname{sen}(\theta)$



Si estudiamos que ocurre para cuando θ tiende a θ_2 por la derecha, tendremos:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p}{\operatorname{sen}(\theta)} \right) &= \frac{p}{\operatorname{sen}(\theta_2)} = \\ &= \frac{p}{\frac{-\sqrt{e^2 - 1}}{e}} = \frac{-p e}{\sqrt{e^2 - 1}} \end{aligned}$$

De esta manera tenemos que las ordenadas en el origen de las rectas tangentes a la curva β en el punto $\beta(\theta)$ cuando θ tiende a θ_2 por la derecha se aproximan al número real $n = -\frac{p e}{\sqrt{e^2 - 1}}$, i.e: las pendientes de

estas rectas se acercan al número real

$m = \sqrt{e^2 - 1}$ y las ordenadas en el origen se acercan al número real

$$n = -\frac{p e}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Nos vamos a fijar entonces en la recta de ecuación:

$$r \equiv y = (\sqrt{e^2 - 1})x - \frac{p e}{\sqrt{e^2 - 1}}$$

Tomemos $\theta \in (\theta_2, 2\pi)$.

Para la abscisa $\beta_1(\theta)$, nuestra recta tiene por ordenada:

$$\begin{aligned} y &= (\sqrt{e^2 - 1}) \beta_1(\theta) - \frac{p e}{\sqrt{e^2 - 1}} = (\sqrt{e^2 - 1}) \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))} \cos(\theta) - \frac{p e}{\sqrt{e^2 - 1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{e^2 - 1}) p \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))} - \frac{p e}{\sqrt{e^2 - 1}} = \frac{(e^2 - 1) p \cos(\theta) - p e (1 + e \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} = \\ &= \frac{e^2 p \cos(\theta) - p \cos(\theta) - p e - p e^2 \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} = \frac{-p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \end{aligned}$$

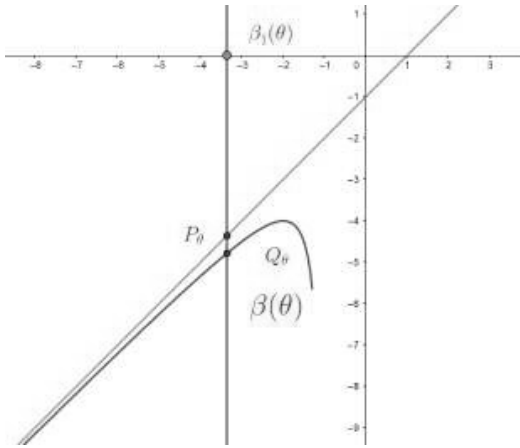
i.e., $\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi)$, la recta r pasa por el punto:

$$P_\theta \left(\beta_1(\theta), -\frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right) = \left(\frac{p \cos(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))}, \frac{-p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right)$$

Y la curva β para esta misma abscisa, pasa por el punto:

$$Q_\theta(\beta_1(\theta), \beta_2(\theta)) = \left(\frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \right)$$

Y nos preguntamos: ¿cómo de cerca estarán ambos puntos P_θ y Q_θ cuando θ tiende a θ_2 por la derecha?



Estudiamos para ello:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} d(P_\theta, Q_\theta)$$

i.e., estudiamos:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} & \left(\sqrt{\left(\frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} \right)^2 + \left(\frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{-p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right)^2} \right) \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\sqrt{\left(\frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right)^2} \right) = \\ &= \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left| \frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right| \end{aligned}$$

Vamos a empezar estudiando:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right)$$

Se trata en principio de una indeterminación de tipo $-\infty + (+\infty)$. Para resolverla, procedemos como sigue:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} + \frac{p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right) \\ = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)(\sqrt{e^2 - 1}) + p(e + \cos(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1})} \right) \end{aligned}$$

Ocurre ahora, que:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(p \operatorname{sen}(\theta)(\sqrt{e^2 - 1}) + p(e + \cos(\theta)) \right) = \left(p \operatorname{sen}(\theta_2)(\sqrt{e^2 - 1}) + p(e + \cos(\theta_2)) \right)$$

Por la ya conocida continuidad de las funciones seno y coseno y por álgebra de límites.

Entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(p \operatorname{sen}(\theta)(\sqrt{e^2 - 1}) + p(e + \cos(\theta)) \right) = \\ = p \frac{(-\sqrt{e^2 - 1})}{e} \sqrt{e^2 - 1} + p \left(e - \frac{1}{e} \right) = -p \frac{(e^2 - 1)}{e} + p \frac{(e^2 - 1)}{e} = 0 \end{aligned}$$

Y también por las mismas razones:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left((1 + e \cos(\theta))(\sqrt{e^2 - 1}) \right) &= (1 + e \cos(\theta_2))(\sqrt{e^2 - 1}) = \\ &= \left(1 + e \left(\frac{-1}{e} \right) \right) (\sqrt{e^2 - 1}) = (1 - 1)(\sqrt{e^2 - 1}) = 0 \end{aligned}$$

Ocurre además que tanto la función que se encuentra en el numerador de nuestro límite, como la que se encuentra en el denominador, son funciones derivables en $(\theta_2, 2\pi)$

Es:

$$\forall \theta \in (\theta_2, 2\pi),$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sqrt{e^2 - 1}(1 + e \cos(\theta)) \right) = (\sqrt{e^2 - 1})(-e \operatorname{sen}(\theta)) = -e\sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sen}(\theta) \neq 0$$

Y si estudiamos:

$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{\frac{d}{d\theta} (p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1} + p(e + \cos(\theta)))}{\frac{d}{d\theta} ((1 + e \cos(\theta))\sqrt{e^2 - 1})}$$

Tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{\frac{d}{d\theta} (p \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1} + p(e + \cos(\theta)))}{\frac{d}{d\theta} ((1 + e \cos(\theta))\sqrt{e^2 - 1})} &= \\ = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{p\sqrt{e^2 - 1} \cos(\theta) - p \operatorname{sen}(\theta)}{-e \operatorname{sen}(\theta)\sqrt{e^2 - 1}} &= \frac{p\sqrt{e^2 - 1} \cos(\theta_2) - p \operatorname{sen}(\theta_2)}{-e \sqrt{e^2 - 1} \operatorname{sen}(\theta_2)} = \\ = \frac{p\sqrt{e^2 - 1} \left(\frac{-1}{e} \right) - p \left(\frac{-\sqrt{e^2 - 1}}{e} \right)}{-e \sqrt{e^2 - 1} \left(\frac{-\sqrt{e^2 - 1}}{e} \right)} &= \frac{\frac{-p\sqrt{e^2 - 1}}{e} + \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{e}}{e^2 - 1} = 0 \end{aligned}$$

De todo lo anterior deducimos, que según la regla de L'Hôpital, ocurre:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p\sqrt{e^2-1} \operatorname{sen}(\theta) + p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2-1} (1 + e \cos(\theta))} \right) &= \\ = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \frac{\frac{d}{d\theta} (p \operatorname{sen}(\theta) \sqrt{e^2-1} + p(e + \cos(\theta)))}{\frac{d}{d\theta} ((1 + e \cos(\theta)) \sqrt{e^2-1})} &= 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{-p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2-1} (1 + e \cos(\theta))} \right) &= \\ = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p\sqrt{e^2-1} \operatorname{sen}(\theta) + p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2-1} (1 + e \cos(\theta))} \right) &= 0 \end{aligned}$$

Según una propiedad de los límites, tenemos ahora, que:

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left| \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{-p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2-1} (1 + e \cos(\theta))} \right| &= \\ = \left| \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left(\frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{-p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2-1} (1 + e \cos(\theta))} \right) \right| &= 0 \end{aligned}$$

Y en consecuencia, será:

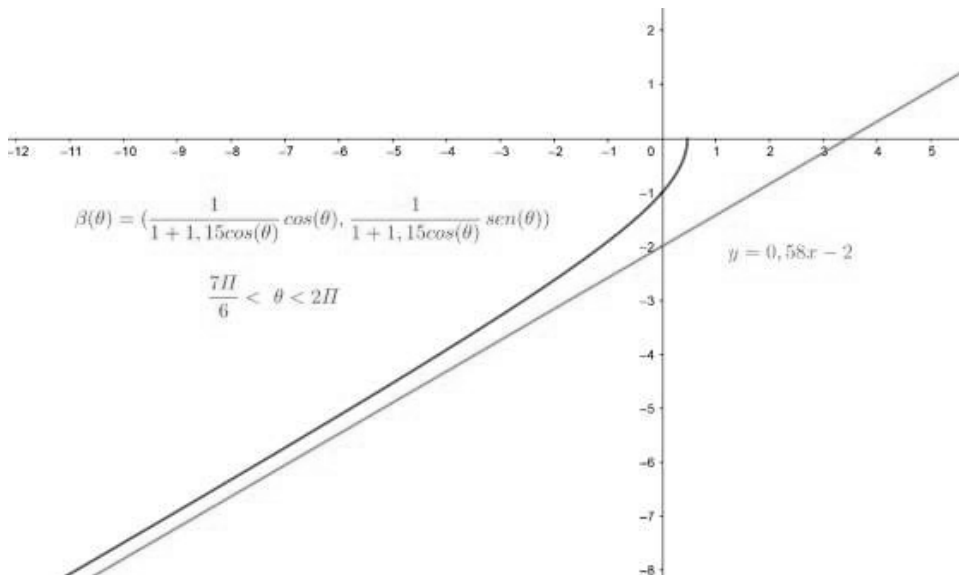
$$\lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} d(P_\theta, Q_\theta) = \lim_{\theta \rightarrow \theta_2^+} \left| \frac{p \operatorname{sen}(\theta)}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{-p(e + \cos(\theta))}{\sqrt{e^2-1} (1 + e \cos(\theta))} \right| = 0$$

Esto confirma que efectivamente la recta de ecuación:

$$r \equiv y = \left(\sqrt{e^2-1} \right) x - \frac{p e}{\sqrt{e^2-1}}$$

Es una asíntota oblicua para nuestra curva β , cuando θ tiende a θ_2 por la derecha.

Hagamos ya un esbozo, con todo lo conocido de la traza de la curva β



Antes de hacer una representación conjunta de las trazas de las curvas α y β , i.e., de la trayectoria de la partícula en este caso, vamos a hacer una observación más.

Vamos a considerar los puntos:

$$F(0,0) \quad y \quad F'\left(\frac{2pe}{e^2-1}, 0\right)$$

Ocurre entonces, que si tomamos: $\theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$ arbitrario, y

consideramos: $P\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)} \cos(\theta), \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \sen(\theta)\right)$

Se tiene:

$$\begin{aligned} & |d(P, F) - d(P, F')| = \\ & = \left| d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)}, \frac{p \sen(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right), (0,0)\right) \right. \\ & \quad \left. - d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)}, \frac{p \sen(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right), \left(\frac{2pe}{e^2-1}, 0\right)\right) \right| = \\ & = \left| \sqrt{\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 + \left(\frac{p \sen(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right)^2} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)} - \frac{2pe}{e^2-1}\right)^2 + \left(\frac{p \sen(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right)^2} \right| = \\ & = \left| \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 (\cos^2(\theta) + \sen^2(\theta))} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 - \frac{4ep^2 \cos(\theta)}{(1+e \cos(\theta))(e^2-1)} + \frac{4e^2p^2}{(e^2-1)^2} + \left(\frac{p \sen(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right)^2} \right| = \\ & = \left| \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{p}{1+e \cos(\theta)}\right)^2 - \frac{4ep^2 \cos(\theta)}{(1+e \cos(\theta))(e^2-1)} + \frac{4e^2p^2}{(e^2-1)^2}} \right| = \\ & = \left| \frac{p}{1+e \cos(\theta)} \right. \\ & \quad \left. - \sqrt{\frac{p^2(e^2-1)^2 - 4ep^2 \cos(\theta)(1+e \cos(\theta))(e^2-1) + 4e^2p^2(1+e \cos(\theta))^2}{(1+e \cos(\theta))^2(e^2-1)^2}} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \sqrt{\frac{p^2(e^4 - 2e^2 + 1) - 4ep^2 \cos(\theta)(e^2 - 1 + e^3 \cos(\theta) - e \cos(\theta)) + 4e^2 p^2(1 + 2e \cos(\theta) + e^2 \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2 (e^2 - 1)^2}} \right| \\
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \sqrt{\frac{p^2 e^4 + 2p^2 e^2 + p^2 + 4e^3 p^2 \cos(\theta) + 4ep^2 \cos(\theta) + 4e^2 p^2 \cos^2(\theta)}{(1 + e \cos(\theta))^2 (e^2 - 1)^2}} \right| = \\
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \sqrt{\frac{p^2(e^4 + 2e^2 + 1 + 4e^3 \cos(\theta) + 4e \cos(\theta) + 4e^2 \cos^2(\theta))}{(1 + e \cos(\theta))^2 (e^2 - 1)^2}} \right| = \\
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \sqrt{\frac{p^2(e^2 + 2e \cos(\theta) + 1)^2}{(1 + e \cos(\theta))^2 (e^2 - 1)^2}} \right| = \\
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p(e^2 + 2e \cos(\theta) + 1)}{(1 + e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right| = \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p|e^2 + 2e \cos(\theta) + 1|}{(1 + e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right|
 \end{aligned}$$

Vemos de esta manera, como ocurre: $\forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi)$,

$$\begin{aligned}
 &\left| d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}\right), (0,0)\right) - d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}\right), \left(\frac{2pe}{e^2 - 1}, 0\right)\right) \right| = \\
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))(e^2 - 1)} |e^2 + 2e \cos(\theta) + 1| \right|
 \end{aligned}$$

Pero observemos, de otro lado, que también sabemos, que:

$$\begin{aligned}
 &\forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi), \quad 1 + e \cos(\theta) > 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi), \quad e \cos(\theta) > -1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi), \quad 2e \cos(\theta) > -2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi), \quad 2e \cos(\theta) + 1 > -1 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi), \quad e^2 + 2e \cos(\theta) + 1 > e^2 - 1 > 0
 \end{aligned}$$

Tendremos por tanto:

$$\begin{aligned}
 &\forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi), \\
 &\left| d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}\right), (0,0)\right) - d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1 + e \cos(\theta)}\right), \left(\frac{2pe}{e^2 - 1}, 0\right)\right) \right| = \\
 &= \left| \frac{p}{1 + e \cos(\theta)} - \frac{p}{(1 + e \cos(\theta))(e^2 - 1)} |e^2 + 2e \cos(\theta) + 1| \right| =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{p}{1+e \cos(\theta)} - \frac{p(e^2 + 2e \cos(\theta) + 1)}{(1+e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right| = \left| \frac{p(e^2 - 1) - p(e^2 + 2e \cos(\theta) + 1)}{(1+e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right| \\
 &= \left| \frac{pe^2 - p - pe^2 - 2pe \cos(\theta) - p}{(1+e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right| = \left| \frac{-2p - 2pe \cos(\theta)}{(1+e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right| = \\
 &= \left| \frac{-2p(1+e \cos(\theta))}{(1+e \cos(\theta))(e^2 - 1)} \right| = \left| \frac{-2p}{e^2 - 1} \right| = \frac{2p}{e^2 - 1}
 \end{aligned}$$

En definitiva, lo que ocurre es que:

$$\forall \theta \in (0, \theta_1) \cup (\theta_2, 2\pi),$$

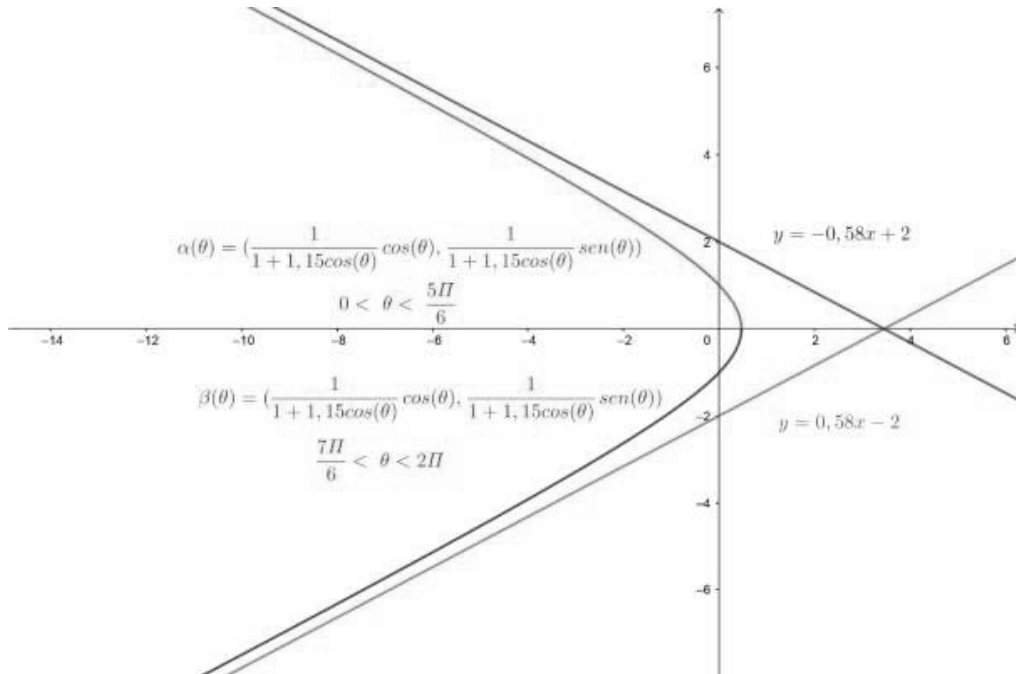
$$\left| d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right), (0,0)\right) - d\left(\left(\frac{p \cos(\theta)}{1+e \cos(\theta)}, \frac{p \sin(\theta)}{1+e \cos(\theta)}\right), \left(\frac{2pe}{e^2-1}, 0\right)\right) \right| = \frac{2p}{e^2-1}$$

i.e, ocurre que todos los puntos de $\text{traz}(\alpha) \cup \text{traz}(\beta)$ se encuentran sobre la **hipérbola** de focos $F(0,0)$ y $F'\left(\frac{2pe}{e^2-1}, 0\right)$ y cte $k = \frac{2p}{e^2-1}$

En este último caso, por tanto, una de las partículas se mueve en torno a la otra (que está situada en el origen $(0,0)$), describiendo una hipérbola de focos $F(0,0)$ (la posición de la primera partícula) y $F'\left(\frac{2pe}{e^2-1}, 0\right)$

En todos los casos, como vemos, una de las partículas se mueve en torno a la otra describiendo una órbita que se corresponde con una cónica, de manera que la partícula donde situamos el origen del sistema de referencia se encuentra en un foco de dicha cónica.

Toda la información que tenemos ya sobre las trazas de α y β , y el hecho de saber que todos sus puntos se encuentran sobre una hipérbola, nos permiten hacer una representación conjunta de ambas trazas:



BIBLIOGRAFÍA

APOSTOL, T. M.: Calculus (Volumen I). Reverté, 1995

DO CARMO, M. P.: Differential geometry of curves and surfaces. Prentice Hall Inc.

GONZALEZ MARTINEZ-PAIS, I.: Introducción a la mecánica celeste. Servicio de publicaciones Universidad de la Laguna, 2003

LIPSCHUTZ, M.: Geometría diferencial. MacGraw-Hill, 1971

PUIG, J.: Análisis Matemático I. Torray-Masson, 1981

SPIVAK, M.: Calculus. Reverté, 1989

*Este libro se terminó de imprimir
el día 2 de febrero de 2022*

