

INTRODUCCIÓN

No todos los subconjuntos del plano “que pueden ser representados a través de una línea” son grafo de alguna función real de variable real, así como tampoco, la forma usual de describir el plano como el producto cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es la única posible.

Vamos a dedicar unas páginas, a estudiar como el potencial de la herramienta del cálculo diferencial no se limita al modelo cartesiano usual del plano ni a la forma de describir estos subconjuntos “formados por líneas” dentro de él.

Empezaremos nuestro estudio presentando de modo somero, una de entre las diferentes alternativas de descripción del plano, la más utilizada después del modelo cartesiano: las coordenadas polares del plano, y una de entre las diferentes alternativas para describir estos subconjuntos de líneas planas: las ecuaciones paramétricas.

Hablaremos también de líneas planas en sus coordenadas polares, aunque veremos que realmente las podemos interpretar como curvas en ecuaciones paramétricas.

Descubriremos a lo largo del texto, como la descripción de estas líneas como curvas regulares planas engloba a todas las demás descripciones. A partir de aquí, estudiaremos si los conceptos y el estudio clásico para representar los grafos de funciones reales de variable real pueden ser generalizados para todas las curvas regulares planas. Clásicamente el estudio de la representación de estas curvas regulares planas no se hace desde esta perspectiva, sino que lleva su propia metodología.

Terminaremos aplicando todo lo aprendido para representar algunas curvas clásicas. Algunas de ellas tratadas desde la antigüedad y algunas otras más recientes, asociadas a algún problema físico también conocido.

Capítulo 1

COORDENADAS POLARES EN EL PLANO

1. Coordenadas polares en el plano

Aunque más adelante intentaremos dar una interpretación geométrica, vamos a iniciar nuestro estudio enunciando el siguiente resultado:

Teorema 1.1 La correspondencia definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\psi: (0, +\infty) \times [0, 2\pi) &\rightarrow \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ (\rho, \theta) &\rightarrow \psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)\end{aligned}$$

es una aplicación biyectiva.

Demostración:

Observemos en principio que si: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta \in \mathbb{R} \\ \rho \sin \theta \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow \psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \in \mathbb{R}^2$.

Pero además, si ocurriera que: $\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (0, 0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta = 0 \\ \rho \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \\ \theta \in \{0, \pi\} \end{cases} \Rightarrow \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \cap \{0, \pi\} = \emptyset$$

Algo que evidentemente es imposible.

Por tanto $\psi(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2$, $\psi(\rho, \theta) \neq (0, 0)$, i.e., $\psi(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

También:

$$\begin{aligned}\text{Si } (\rho, \theta), (\rho', \theta') &\in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad (\rho, \theta) = (\rho', \theta') \Rightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \theta = \theta' \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \rho \cos \theta = \rho' \cos \theta' \\ \rho \sin \theta = \rho' \sin \theta' \end{cases} &\Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\rho' \cos \theta', \rho' \sin \theta') \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta')\end{aligned}$$

Luego ψ es una aplicación que queda bien definida.

Tomemos ahora: $(\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y supongamos que:

$\psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta')$. Entonces tendremos:

$$\begin{aligned}\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) &= (\rho' \cos \theta', \rho' \sin \theta') = \psi(\rho', \theta') \Rightarrow \\ \rho \cos \theta &= \rho' \cos \theta' \\ \rho \sin \theta &= \rho' \sin \theta'\end{aligned}$$

De un lado:

$$\begin{aligned}\rho^2 \cos^2 \theta &= (\rho')^2 \cos^2 \theta' \\ \rho^2 \sin^2 \theta &= (\rho')^2 \sin^2 \theta' \\ \Rightarrow \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta &= (\rho')^2 \cos^2 \theta' + (\rho')^2 \sin^2 \theta' \Rightarrow \\ \rho^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) &= (\rho')^2 (\cos^2 \theta' + \sin^2 \theta') \Rightarrow \rho^2 = (\rho')^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow |\rho| &= |\rho'| \Rightarrow \rho = \rho' \text{ por ser ambos positivos}\end{aligned}$$

Y conocido este hecho, de otro lado:

$$\begin{aligned}\rho \cos \theta &= \rho' \cos \theta' \\ \rho \sin \theta &= \rho' \sin \theta'\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \cos \theta = \cos \theta' \\ \sin \theta = \sin \theta' \end{cases} \Rightarrow \cos \theta' \sin \theta = \cos \theta \sin \theta' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \theta \cos \theta' - \cos \theta \sin \theta' = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta - \theta') = 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ 0 \leq \theta' < 2\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta - \theta') = 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi \\ -2\pi < -\theta' \leq 0 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}(\theta - \theta') = 0 \\ -2\pi < \theta - \theta' < 2\pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ó } \theta - \theta' = -\pi \\ \text{ó } \theta - \theta' = 0 \\ \text{ó } \theta - \theta' = \pi \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{ó } \theta' = \theta + \pi \\ \text{ó } \theta' = \theta \\ \text{ó } \theta' = \theta - \pi \end{array} \right\}$$

Tenemos así:

$$\begin{aligned} & \text{si } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \text{ y } \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho' \text{ y además ocurre:} \\ \text{(i) } \theta' = \theta + \pi, \quad \text{(ii) } \theta' = \theta, \quad \text{o (iii) } \theta' = \theta - \pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(i) si ocurriera: } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta'), \\ & \rho = \rho' \text{ y } \theta' = \theta + \pi \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') & \Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\rho \cos(\theta + \pi), \rho \sin(\theta + \pi)) \Rightarrow \\ \rho \cos \theta &= \rho \cos(\theta + \pi) \Rightarrow \cos \theta = \cos \theta \cos \pi - \sin \theta \sin \pi \Rightarrow \cos \theta = -\cos \theta \Rightarrow \\ \rho \sin \theta &= \rho \sin(\theta + \pi) \Rightarrow \sin \theta = \sin \theta \cos \pi + \cos \theta \sin \pi \Rightarrow \sin \theta = -\sin \theta \Rightarrow \\ & \Rightarrow \frac{2 \cos \theta}{2 \sin \theta} = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \psi(\rho, \theta) = (0, 0) \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{(ii) si ocurriera: } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta'), \\ & \rho = \rho' \text{ y } \theta' = \theta - \pi \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') & \Rightarrow (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\rho \cos(\theta - \pi), \rho \sin(\theta - \pi)) \Rightarrow \\ \rho \cos \theta &= \rho \cos(\theta - \pi) \Rightarrow \cos \theta = \cos \theta \cos \pi + \sin \theta \sin \pi \Rightarrow \cos \theta = -\cos \theta \Rightarrow \\ \rho \sin \theta &= \rho \sin(\theta - \pi) \Rightarrow \sin \theta = \sin \theta \cos \pi - \cos \theta \sin \pi \Rightarrow \sin \theta = -\sin \theta \Rightarrow \\ & \frac{2 \cos \theta}{2 \sin \theta} = 0 \Rightarrow \cos \theta = 0 \Rightarrow \psi(\rho, \theta) = (0, 0) \quad (\rightarrow \leftarrow) \end{aligned}$$

De todo lo anterior deducimos que solo puede darse la opción (iii), i.e., ocurre:

$$\text{si } (\rho, \theta), (\rho', \theta') \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi) \text{ y } \psi(\rho, \theta) = \psi(\rho', \theta') \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \rho = \rho' \\ \text{y} \\ \theta = \theta' \end{array} \right. \Rightarrow (\rho, \theta) = (\rho', \theta')$$

Y en consecuencia la aplicación ψ es una aplicación inyectiva.

Tomemos ahora $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ arbitrario. Tenemos para tal (x, y) las siguientes opciones:

1. (x, y) está en el semieje de abscisas positivo, i.e., $x > 0, y = 0$
2. (x, y) está en el primer cuadrante, i.e., $x > 0, y > 0$
3. (x, y) está en el semieje de ordenadas positivo, i.e., $x = 0, y > 0$
4. (x, y) está en el segundo cuadrante, i.e., $x < 0, y > 0$
5. (x, y) está en el semieje de abscisas negativo, i.e., $x < 0, y = 0$
6. (x, y) está en el tercer cuadrante, i.e., $x < 0, y < 0$
7. (x, y) está en el semieje de ordenadas negativo, i.e., $x = 0, y < 0$
8. (x, y) está en el cuarto cuadrante, i.e., $x > 0, y < 0$

Bien, pues veamos que ocurre en cada una de las situaciones:

1. Si (x, y) está en el semieje de abscisas positivo, i.e., si $x > 0, y = 0$, y consideramos el par: (ρ, θ) con: $\begin{cases} \rho = x \\ \theta = 0 \end{cases}$, tenemos lo siguiente:

$(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi(x, 0) = (x \cos 0, x \sin 0) = (x, 0)$$

Luego si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x > 0, y = 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$,

que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

2. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x > 0$, $y > 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \text{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Bien, pues consideramos entonces el par:

$$(\rho, \theta), \text{ con: } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ tal que: } \text{tg} \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Tendremos para él: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2} \cos \theta, \sqrt{x^2 + y^2} \sin \theta)$$

Pero como:

$$\text{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Tendremos de un lado:

$$\begin{aligned} x \text{tg} \theta = y &\Rightarrow x^2 \text{tg}^2 \theta = y^2 \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \text{tg}^2 \theta} = \\ &= \sqrt{x^2(1 + \text{tg}^2 \theta)} = |x| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = |x| \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned} x = \frac{y}{\text{tg} \theta} &\Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{\text{tg}^2 \theta} \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\text{tg}^2 \theta} + y^2} = \\ &= \sqrt{\frac{y^2}{\text{tg}^2 \theta} (1 + \text{tg}^2 \theta)} = \left| \frac{y}{\text{tg} \theta} \right| \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta}} = \frac{y}{\text{tg} \theta} \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{y}{\text{tg} \theta} \frac{1}{\cos \theta} = \frac{y}{\sin \theta} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho = \frac{y}{\sin \theta} \end{aligned}$$

Por lo que ocurre:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \left(\frac{x}{\cos \theta} \cos \theta, \frac{y}{\sin \theta} \sin \theta \right) = (x, y)$$

i.e.,

si $x > 0$, $y > 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

3. Si ahora: $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x = 0$, $y > 0$ y consideramos el par:

$$(\rho, \theta) = \left(y, \frac{\pi}{2}\right)$$

Tendremos: $(\rho, \theta) = \left(y, \frac{\pi}{2}\right) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi\left(y, \frac{\pi}{2}\right) = \left(y \cos\left(\frac{\pi}{2}\right), y \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = (0, y) = (x, y)$$

Luego:

si $x = 0$, $y > 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

4. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x < 0$, $y > 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \quad \text{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Si consideramos entonces el par (ρ, θ) con:

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \theta = \alpha + \pi \end{cases}$$

Tendremos:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 &\Rightarrow \pi - \frac{\pi}{2} < \alpha + \pi < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \theta < \pi \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{aligned}$$

i.e., tenemos que: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

siendo: $x < 0$, $y > 0$, $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tenemos:

De un lado.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg} \theta \Rightarrow y^2 = x^2 \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = |x| \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \\ &= (-x) \left(\frac{1}{-\cos \theta} \right) = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos \theta} \end{aligned}$$

Y de otro:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} + y^2} = \\ &= \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \right| \left| \frac{1}{\cos \theta} \right| = \frac{|y|}{|\operatorname{tg} \theta|} \frac{1}{|\cos \theta|} = \frac{y}{\frac{|\operatorname{sen} \theta|}{|\cos \theta|}} \frac{1}{|\cos \theta|} = \\ &= \frac{y}{|\operatorname{sen} \theta|} = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \rho = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \end{aligned}$$

Luego:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{x}{\cos \theta} \cos \theta, \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y)$$

i.e.,

si $x < 0$, $y > 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

5. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y = 0$, basta considerar ahora el par:

$$(\rho, \theta) = (-x, \pi)$$

para que ocurra: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi(-x, \pi) = (-x \cos(\pi), -x \operatorname{sen}(\pi)) = (-x \cdot (-1), -x \cdot 0) = (x, 0) = (x, y)$$

Luego también:

si $x < 0$, $y = 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

6. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y < 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Consideramos en este caso el par:

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + \pi)$$

Y tendremos entonces:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} &\Rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg}(\alpha + \pi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

i.e., $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$

Además, siendo $x < 0$, $y < 0$, $\theta \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ ocurre lo siguiente:

De un lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow y = x \operatorname{tg} \theta \Rightarrow y^2 = x^2 \operatorname{tg}^2 \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \theta} = \sqrt{x^2(1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = |x| \frac{1}{|\cos \theta|} = \\ &= (-x) \frac{1}{(-\cos \theta)} = \frac{x}{\cos \theta} \Rightarrow \rho = \frac{x}{\cos \theta}\end{aligned}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow x^2 = \frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} + y^2} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} (1 + \operatorname{tg}^2 \theta)} = \left| \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \right| \frac{1}{|\cos \theta|} = \\ &= \frac{|y|}{|\operatorname{tg} \theta|} \frac{1}{|\cos \theta|} = \frac{(-y)}{\frac{|\operatorname{sen} \theta|}{|\cos \theta|}} \frac{1}{|\cos \theta|} = \frac{(-y)}{(-\operatorname{sen} \theta)} = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow \rho = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}\end{aligned}$$

Por tanto: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ y además:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \cos \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{x}{\cos \theta} \cos \theta, \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y)$$

i.e.,

si $x < 0$, $y < 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

7. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x = 0$, $y < 0$ y consideramos el par:

$$(\rho, \theta) = \left(-y, \frac{3\pi}{2} \right)$$

Tendremos:

$$(\rho, \theta) = \left(-y, \frac{3\pi}{2} \right) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

Y además:

$$\psi(\rho, \theta) = \psi\left(-y, \frac{3\pi}{2}\right) = \left(-y \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right), -y \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = (0, y) = (x, y)$$

Luego:

si $x = 0$, $y < 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, que cumple: $\psi(\rho, \theta) = (x, y)$

8. Por último, si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x > 0$, $y < 0$, ocurre lo siguiente:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \frac{y}{x} < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ \exists! \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \end{cases}$$

Bien, pues vamos a considerar entonces el par:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + 2\pi \right)$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} > 0 \\ -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 &\Rightarrow \frac{3\pi}{2} < \alpha + 2\pi = \theta < 2\pi \\ \operatorname{tg} \theta &= \operatorname{tg}(\alpha + 2\pi) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}\end{aligned}$$

i.e.,

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + 2\pi) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

Y además, de un lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow y = x \operatorname{tg} \theta \Rightarrow y = x \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} \Rightarrow y^2 = x^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta} \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{x^2 + x^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{x^2 \operatorname{cos}^2 \theta + x^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{x^2}{\operatorname{cos}^2 \theta}} = \\ &= \left| \frac{x}{\operatorname{cos} \theta} \right| = \frac{|x|}{|\operatorname{cos} \theta|} = \frac{x}{\operatorname{cos} \theta}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\rho = \frac{x}{\operatorname{cos} \theta}$$

Y de otro lado:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} &\Rightarrow x = \frac{y}{\operatorname{tg} \theta} \Rightarrow x = \frac{y \operatorname{cos} \theta}{\operatorname{sen} \theta} \Rightarrow x^2 = y^2 \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \Rightarrow \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} &= \sqrt{y^2 \frac{\operatorname{cos}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} + y^2} = \sqrt{\frac{y^2 \operatorname{cos}^2 \theta + y^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta}} = \sqrt{\frac{y^2}{\operatorname{sen}^2 \theta}} = \\ &= \left| \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \right| = \frac{|y|}{|\operatorname{sen} \theta|} = \frac{-y}{-\operatorname{sen} \theta} = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}\end{aligned}$$

i.e.,

$$\rho = \frac{y}{\operatorname{sen} \theta}$$

Por lo que tenemos que:

$$\psi(\rho, \theta) = (\rho \operatorname{cos} \theta, \rho \operatorname{sen} \theta) = \left(\frac{x}{\operatorname{cos} \theta} \operatorname{cos} \theta, \frac{y}{\operatorname{sen} \theta} \operatorname{sen} \theta \right) = (x, y)$$

Luego:

$$\text{si } x > 0, \quad y < 0 \Rightarrow \exists (\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi), \quad \text{que cumple: } \psi(\rho, \theta) = (x, y)$$

Vemos, con todo lo anterior que esté donde esté $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, siempre logramos encontrar: $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que cumple que:

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y)$$

Y por tanto la función ψ también es sobreyectiva.

Este hecho unido a todos los anteriores, permiten concluir que la aplicación ψ es una aplicación biyectiva. Así queda probado el resultado.

c.s.q.d.

Este resultado garantiza que tenga sentido la siguiente definición:

Definición 1.2 Dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, llamamos coordenadas polares del punto (x, y) al único par $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ tal que:

$$\psi(\rho, \theta) = (x, y)$$

En otras palabras, llamamos coordenadas polares de (x, y) , al par:

$$(\rho, \theta) = \psi^{-1}(x, y)$$

En esta situación, i.e., si (ρ, θ) son las coordenadas polares del punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, entonces:

$\rho > 0$ recibe el nombre de “radio polar” del punto (x, y) ó “distancia radial”

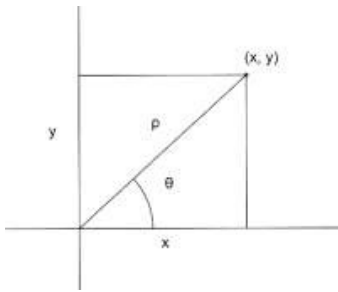
$\theta \in [0, 2\pi)$ recibe el nombre de “argumento” del punto (x, y) ó “ángulo polar”

La forma de determinar las coordenadas polares de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ha quedado descrita al estudiar la sobreyectividad de la aplicación ψ

Geométricamente, si por ejemplo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x > 0$, $y > 0$, i.e., si está situado en el primer cuadrante, hemos determinado en el teorema, cómo su antecedente (ρ, θ) venía dado por:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ es el único ángulo que cumple: } \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$



i.e., ρ es la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas $(0,0)$

Y θ es el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo, pues este es el único ángulo del primer cuadrante cuya tangente es:

$$\frac{\frac{y}{\rho}}{\frac{x}{\rho}} = \frac{y}{x}$$

Las coordenadas polares (ρ, θ) de un punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ que esté en el primer cuadrante, vienen dadas pues, por:

Distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas (radio polar ρ)

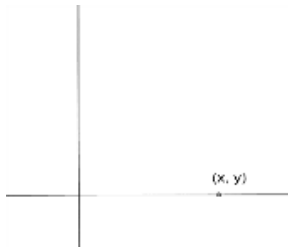
Ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo (argumento θ)

No es difícil comprobar, como para los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ situados en los demás cuadrantes del plano ó sobre los semiejes, seguimos teniendo la misma interpretación.

Hemos visto la de un punto que corresponde al caso 2 de los estudiados en el teorema.

Intentemos hacerlo para todos los demás casos:

1. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x > 0$, $y = 0$. Veíamos en el resultado como su antecedente venía dado por el par: $(\rho, \theta) = (x, 0)$



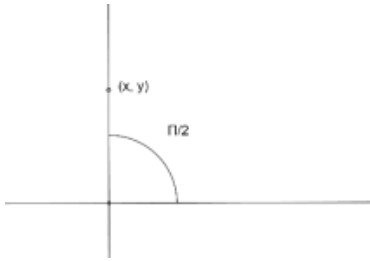
Y desde luego:

$\rho = x$ marca la distancia de (x, y) a $(0,0)$

$\theta = 0$ es el ángulo que forma (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

3. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, $x = 0$, $y > 0$, su antecedente viene dado por:

$$(\rho, \theta) = \left(y, \frac{\pi}{2}\right)$$



Y sin duda:

$\rho = y$ es la distancia de $(0, y)$ a $(0, 0)$

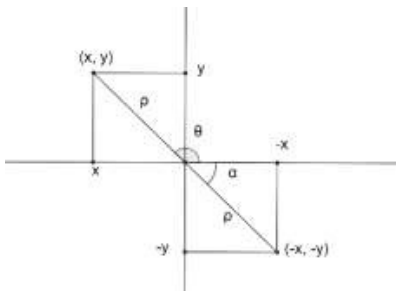
$\theta = \pi/2$ es el ángulo que forma $(0, y)$ con el semieje de abscisas positivo

4. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y > 0$, su antecedente viene dado por el par:

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + \pi)$$

Siendo α el único ángulo entre $-\pi/2$ y 0 que cumple:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$$



Tal ángulo α es, como se muestra en la figura, el ángulo que forma el vector de coordenadas $(-x, -y)$ con el semieje de abscisas positivo (medido en sentido negativo, i.e., en el sentido contrario a las agujas del reloj).

Si tomamos el simétrico del punto $(-x, -y)$ respecto del origen de coordenadas, obtenemos el punto (x, y) , y si notamos por θ al ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo,

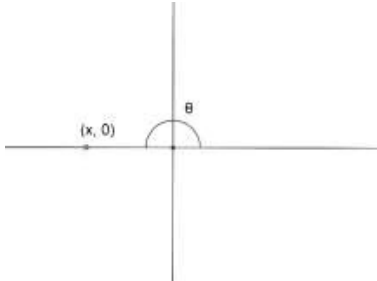
la relación que se establece entre α y θ es, como se aprecia en la figura: $\theta - \alpha = \pi$. Por tanto, θ , el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo tendrá amplitud: $\theta = \alpha + \pi$. Nuevamente ocurre, como vemos, que:

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia del punto (x, y) al origen.

$\theta = \alpha + \pi$ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

5. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y = 0$, el antecedente de (x, y) viene dado por el par:

$$(\rho, \theta) = (-x, \pi).$$



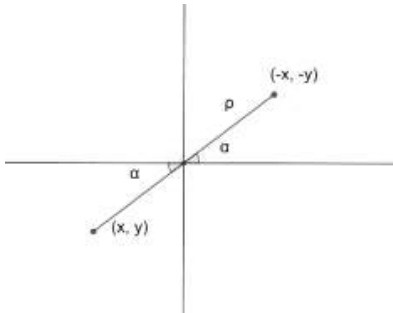
Y sin duda:

$\rho = -x$ es la distancia de (x, y) a $(0, 0)$

$\theta = \pi$ es el ángulo que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

6. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x < 0$, $y < 0$, su antecedente viene dado por:

$$(\rho, \theta) = (\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + \pi)$$



Siendo $\alpha \in (0, \pi/2)$ el único ángulo que cumple:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x} = \frac{-y}{-x}$$

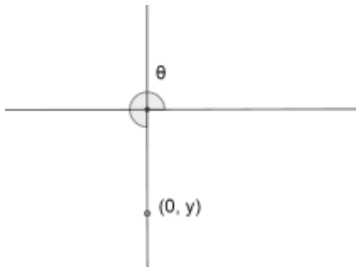
Tal ángulo $\alpha \in (0, \pi/2)$ no es otro que el ángulo que forma el vector de coordenadas $(-x, -y)$ con el semieje de abscisas positivo. Siendo además el punto (x, y) el punto simétrico de $(-x, -y)$ respecto del origen, ocurre que α es el ángulo que forma el semieje de abscisas negativo con el vector de coordenadas (x, y) .

Por tanto $\theta = \alpha + \pi$ vuelve a ser el ángulo que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

Y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ sigue siendo, sin duda, la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas $(0, 0)$

7. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x = 0$, $y < 0$, su antecedente era:

$$(\rho, \theta) = \left(-y, \frac{3\pi}{2}\right)$$



Y no cabe duda de que:

$\rho = -y > 0$ es la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas.

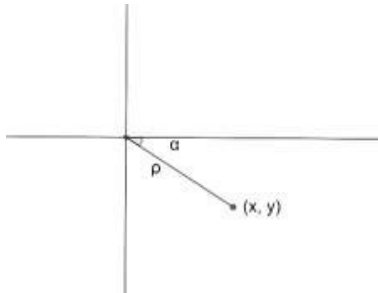
$\theta = 3\pi/2$ es el ángulo que forma el vector de coordenadas (x, y) con el semieje de abscisas positivo.

8. Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $x > 0$, $y < 0$, su antecedente venía dado por:

$$(\rho, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \alpha + 2\pi\right)$$

Siendo α el único ángulo entre $-\pi/2$ y 0 que cumple que:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$$



Este ángulo según la gráfica no es otro que el ángulo que forma el semieje de abscisas positivo con el vector de coordenadas (x, y) medido en sentido negativo, i.e., en el sentido de las agujas del reloj.

$\theta = \alpha + 2\pi$ no será otro ángulo entonces, que el que forma el vector (x, y) con el semieje de abscisas positivo tomado en sentido positivo (i.e. en sentido contrario a las agujas del reloj)

Y $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ sigue siendo la distancia del punto (x, y) al origen de coordenadas.

Sea cual sea pues, la posición de $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ en el plano, sus coordenadas polares $(\rho, \theta) = \psi^{-1}(x, y)$ pueden ser interpretadas como:

$\rho = \text{distancia de } (x, y) \text{ al origen } (0, 0)$

$\theta = \text{ángulo que forma el vector } (x, y) \text{ con el semieje de abscisas positivo}$

Podemos concluir de todo lo anterior:

- Para cada punto (x, y) del plano distinto del origen, podemos encontrar unas únicas coordenadas polares $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ que lo describen.
- Y recíprocamente, dado $(\rho, \theta) \in (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, existe un único punto (x, y) del plano, distinto del origen, cuyas coordenadas polares son exactamente (ρ, θ)

Definición 1.3: Sea:

$$\begin{aligned} f: A \subseteq [0, 2\pi) &\subseteq \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) \end{aligned}$$

una función definida en $A \subseteq [0, 2\pi)$. Llamamos **grafo ó gráfica de f en coordenadas polares**, y lo notamos: $\text{graf}_{\text{pol}}(f)$ al conjunto:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\}$$

Observaciones:

1. No cabe duda, a la vista de la definición, de que la gráfica de cualquier función f en coordenadas polares, es un subconjunto de

$$(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

i.e.,

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) \subseteq (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

2. Siendo para cada función f en estas condiciones, su gráfica en coordenadas polares un subconjunto de $(0, +\infty) \times [0, 2\pi)$, i.e., ocurriendo:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) \subseteq (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$$

será: $\psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f))$ un subconjunto de $\psi((0, +\infty) \times [0, 2\pi))$

Luego la gráfica de una función f en coordenadas polares tiene una representación en coordenadas rectangulares en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Tal representación no será otra que:

$$\begin{aligned} \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f)) &= \psi(\{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\}) = \\ &= \{\psi(f(\theta), \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\} = \\ &= \{(f(\theta) \cos \theta, f(\theta) \sin \theta), \quad \theta \in A \subseteq [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Vamos a ver ahora, a modo de ejemplo algunas gráficas clásicas de funciones en coordenadas polares.

Ejemplos:

1. Si $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. La función:

$$\begin{aligned} f: [0, 2\pi) &\rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = r \end{aligned}$$

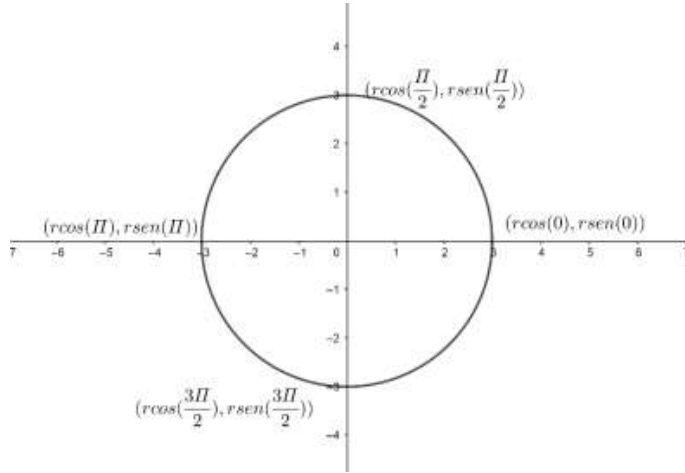
Tiene por gráfica en coordenadas polares, al conjunto:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\} = \{(r, \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\}$$

Cuya representación en coordenadas cartesianas, en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ será:

$$\begin{aligned} \psi(\text{graf}_{\text{pol}}(f)) &= \psi(\{(r, \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\}) = \\ &= \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi)\} \end{aligned}$$

Este conjunto representa en $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ a la **circunferencia centrada en el origen de coordenadas y de radio $r > 0$** .



El poder tomar esta circunferencia como grafo de una función, aunque sea un grafo en coordenadas polares, ya supone (al menos para este caso concreto) una ventaja frente a los grafos en coordenadas cartesianas. No podemos encontrar en coordenadas cartesianas una función cuyo grafo sea esta circunferencia. Y no podemos hacerlo por razones evidentes mirando la propia gráfica.

Si encontráramos una función real de variable real g cuya gráfica fuera nuestra circunferencia $C((0,0), r)$ tendríamos lo siguiente:

$$\begin{cases} (0, r) \in C((0,0), r) \\ (0, -r) \in C((0,0), r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (0, r) \in \text{graf}(g) \\ (0, -r) \in \text{graf}(g) \end{cases} \Rightarrow$$

De un lado: $0 \in \text{Dom}(g)$, y de otro: $g(0) = r$ y $g(0) = -r$. Hecho que contradice el que g sea una función.

Por tanto no podemos encontrar una función real de variable real en coordenadas cartesianas cuyo grafo sea la circunferencia $C((0,0), r)$.

2. La función definida en la forma:

$$\begin{aligned} f: (0, 2\pi) &\subseteq [0, 2\pi) \rightarrow (0, +\infty) \\ \theta &\rightarrow f(\theta) = \theta \end{aligned}$$

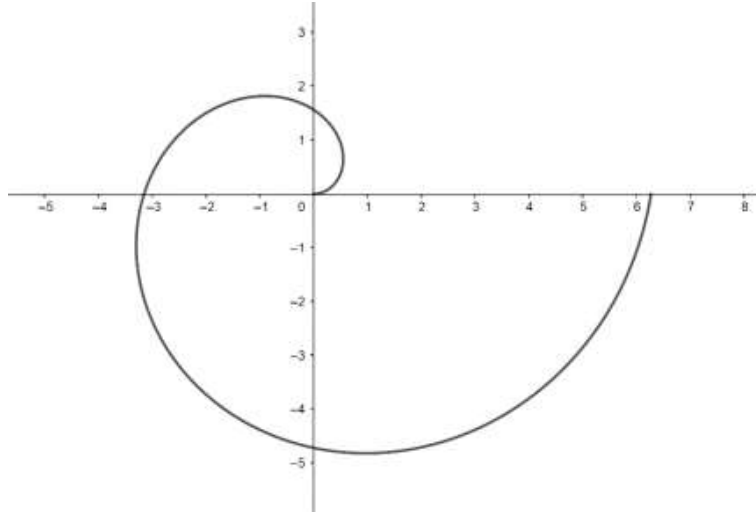
Tiene como grafo en coordenadas polares:

$$\text{graf}_{\text{pol}}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\} = \{(\theta, \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\}$$

Cuya representación en coordenadas cartesianas será:

$$\{(\theta \cos \theta, \theta \sin \theta), \quad \theta \in (0, 2\pi)\} \subseteq \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

Este grafo en coordenadas polares, recibe el nombre de “**espiral de Arquímedes**” y describe a todos los puntos de $(-2\pi, 2\pi) \times (-2\pi, 2\pi)$ cuya distancia al origen coincide con el ángulo que forma su radio vector con el semieje de abscisas positivo.



3. La función definida en la forma:

$$f: \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f(\theta) = \sqrt{2} a \sqrt{\cos(2\theta)}$$

con $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Es una función que queda bien definida, pues:

$$\text{si } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 0 \leq \theta < \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq 2\theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos(2\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

$$\text{si } \theta \in \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < 2\theta < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\cos(2\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

$$\text{si } \theta \in \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \Rightarrow \frac{7\pi}{4} < \theta < 2\pi \Rightarrow \frac{7\pi}{2} < 2\theta < 4\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(2\theta) > 0 \Rightarrow f(\theta) > 0$$

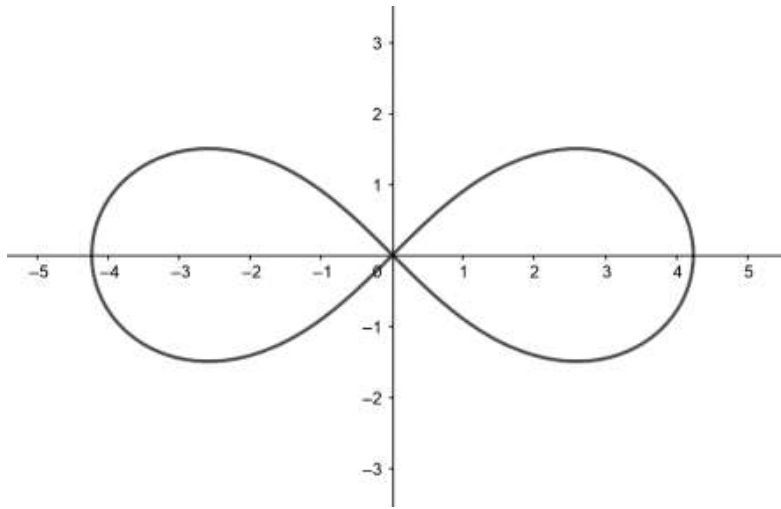
Y que tiene además por grafo en coordenadas polares al conjunto:

$$\text{graf}_{pol}(f) = \left\{ (f(\theta), \theta), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \right\}$$

Las coordenadas cartesianas de este conjunto de puntos en coordenadas polares forman el subconjunto de $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ siguiente:

$$\left\{ \left(\sqrt{2} a \sqrt{\cos(2\theta)} \cos\theta, \sqrt{2} a \sqrt{\cos(2\theta)} \sen\theta \right), \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right) \right\}$$

La curva que describe, recibe el nombre de “**Lemniscata de Bernoulli**”, y presenta la siguiente apariencia:



4. La función definida en la forma:

$$f: [0, 2\pi] - \{\pi\} \subseteq [0, 2\pi] \rightarrow (0, +\infty)$$

$$\theta \rightarrow f(\theta) = a(1 + \cos\theta)$$

siendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Queda bien definida, tiene por grafo en coordenadas polares:

$$\text{graf}_{pol}(f) = \{(f(\theta), \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] - \{\pi\}\} =$$

$$= \{(a(1 + \cos\theta), \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] - \{\pi\}\}$$

Conjunto de coordenadas polares, que tiene como representación en coordenadas cartesianas:

$$\{(a(1 + \cos\theta)\cos\theta, a(1 + \cos\theta)\sin\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] - \{\pi\}\}$$

El subconjunto que origina en $\mathbb{R}^2$ recibe el nombre de “**cardioide**”.

